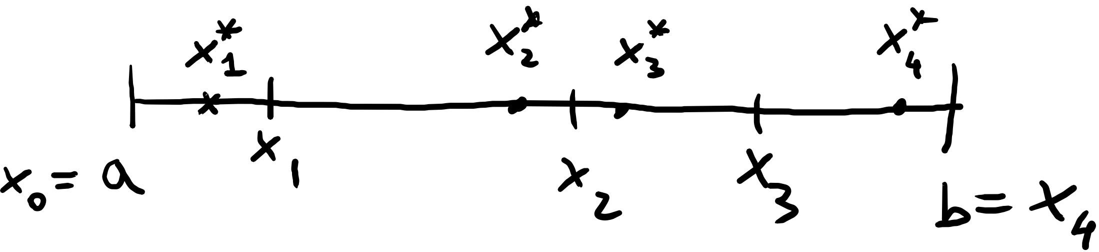
3 Dicembre

Integrale di Riemann

<u>Def</u> (Somme di Riemann) Dato $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e data una decomp. Δ di $[a,b]$

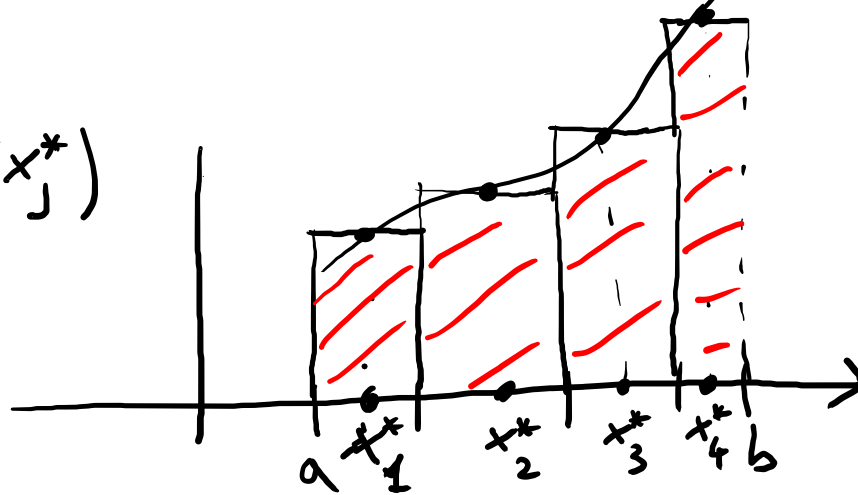
$$\Delta \qquad x_0=a<\cdots\cdots<x_n=b$$

con in più una scelta di un punto $x_j^* \in [x_{j-1},x_j]$ per ogni $j=1,\dots,n$



allora la relativa somma di Riemann e' data da

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})\, f(x_j^*)$$



$\approx$

Def (Integrale di Riemann) Una $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice integrabile per Riemann se $\exists\ A \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0$ t.c.

$\forall\ \Delta \qquad x_0 = a < \cdots < x_n = b$

e $\forall$ scelte di punti $x_j^* \in [x_{j-1}, x_j]\ \forall j = 1, \dots, n$,

se $|\Delta| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) f(x_j^*) - A \right| < \varepsilon$.

A è l'integrale di Riemann di f.

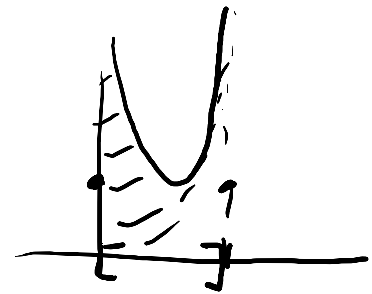
Teorema Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Sono equivalenti:

1) f è integrabile per Darboux;

2) f è integrabile per Riemann.

Inoltre, se 1) e 2) sono vere, si ha

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

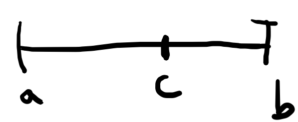


<u>Teor</u> Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f \in L[a,b]$ e

sia $[\alpha, \beta] \subseteq [a,b]$

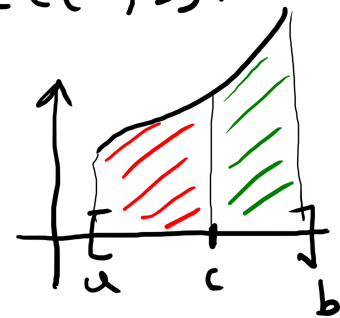
Allora $f \in L[\alpha,\beta]$

Teorema (di Chasles)



Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e sia $c \in (a,b)$.

Sono equivalenti



1) $f \in L[a,b]$

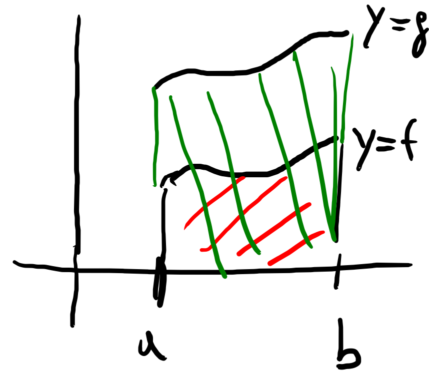
2) $f \in L[a,c]$ ed $f \in L[c,b]$

Inoltre

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Teor Siano $f, g \in L[a,b]$ t.c. $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a,b]$. Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \qquad (1)$$



Inoltre, se $f, g \in C^0([a,b])$ con $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ e le funzioni non sono uguali, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx. \qquad (2)$$

Teor $f \in C^0([a,b]) \Longrightarrow f \in L([a,b])$

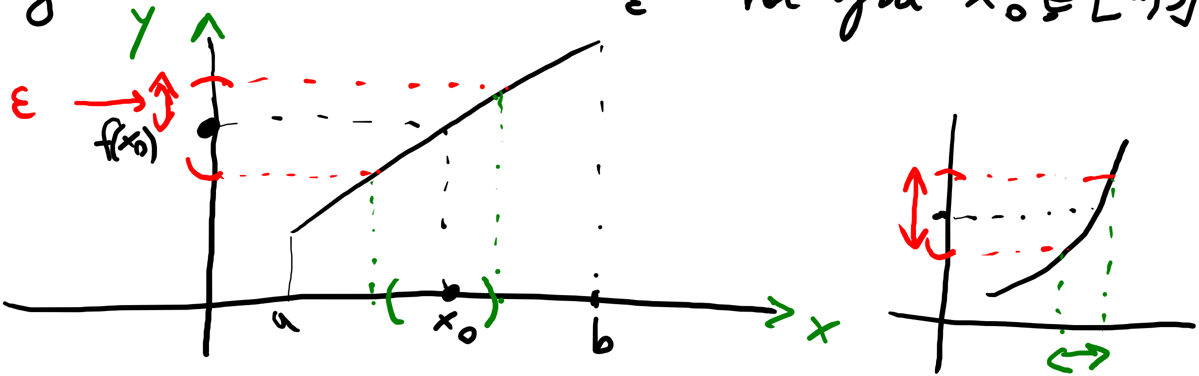
Dim Per prima cosa si dimostra che se f è continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ allora f è uniformemente continua in $[a,b]$.

E cioè, ricordando che f continua in $[a,b]$ significa che f è continua in ogni $x_0 \in [a,b]$, la continuità in $[a,b]$ significa

$\forall x_0 \in [a,b]$ si ha

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_{\varepsilon x_0} > 0$ t.c. $\quad |x - x_0| < \delta_{\varepsilon x_0} \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

L'uniforme continuità in $[a,b]$ si ha quando si può scegliere il medesimo δ_ε per ogni $x_0 \in [a,b]$



Un teorema garantisce che $f \in C^0([a,b]) \Longrightarrow$ f è uniformemente continua in $[a,b]$.

Questo significa che

(1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $\underset{x,y \in [a,b]}{|x-y| < \delta_\varepsilon} \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Dimostriamo che (1) $\Longrightarrow f \in L[a,b]$

E' sufficiente dimostrare che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \Delta_\varepsilon$ t.c. $0 \le S(\Delta_\varepsilon) - s(\Delta_\varepsilon) < \varepsilon$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo il $\delta_\varepsilon > 0$ di (1).

Poi consideriamo una decomposizione Δ di Cauchy

$|\Delta| < \delta_\varepsilon$

$\Delta \qquad x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$

$0 < x_j - x_{j-1} < \delta_\varepsilon \quad \forall \quad j = 1, \dots, n$

$$S(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sup f([x_{j-1}, x_j]) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) f(x_j^M)$$

dove x_j^M è un punto di massimo di f in $[x_{j-1}, x_j]$

$$S(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) f(x_j^M)$$

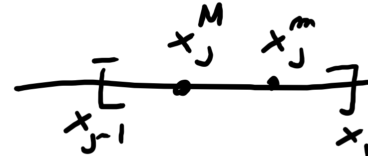
x_j^M punto di massimo di f in $[x_{j-1}, x_j]$

$$s(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \inf f([x_{j-1}, x_j])$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) f(x_j^m)$$

x_j^m punto di minimo di f in $[x_{j-1}, x_j]$.

$$0 \le S(\Delta) - s(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} \overbrace{(x_j - x_{j-1})}^{>0} \overbrace{\left(f(x_j^M) - f(x_j^m)\right)}^{\ge 0}$$



Osserviamo che $|x_j^M - x_j^m| \le |x_j - x_{j-1}| < \delta_\varepsilon$.

Dalla (1) (cioè $|x-y|<\delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$)

segue che $|x_j^M - x_j^m| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow 0 \leq f(x_j^M) - f(x_j^m) < \varepsilon$

$$S(\Delta_\varepsilon) - s(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \underbrace{\left(f(x_j^M) - f(x_j^m)\right)}_{<\varepsilon}$$

$$< \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})\, \varepsilon = (b-a)\,\varepsilon$$

Conclusione $\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \Delta_\varepsilon \text{ t.c. } 0 \leq S(\Delta_\varepsilon) - s(\Delta) < (b-a)\,\varepsilon}$

Notare che la proposizione

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \Delta_\varepsilon \ \text{t.c.} \quad 0 \leq S(\Delta_\varepsilon) - s(\Delta_\varepsilon) < (b-a)\,\varepsilon}$$

è equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \Delta_\varepsilon \ \text{t.c.} \quad 0 \leq S(\Delta_\varepsilon) - s(\Delta_\varepsilon) < \varepsilon$$

Def Data $f \in L[a,b]$ la sua media è

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = ⨍_a^b f(x)\,dx$$

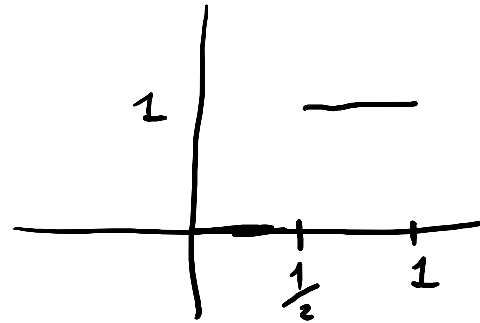
Teor Sia $f \in C^0([a,b])$. Esiste $x_0 \in [a,b]$

$$f(x_0) = ⨍_a^b f(x)\,dx$$

<u>Osservazione</u> Se $f \notin C^0([a,b])$ allora il teorema è in generale falso.

Ad es sia $[a,b]=[0,1]$

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } 0\le x\le \frac{1}{2} \\ 1 & \text{per } \frac{1}{2}< x\le 1 \end{cases}$$



$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 1\,dx$$

$$= \frac{1}{2}$$

Dim $f \in C^0([a,b]) \Rightarrow$ esiste un punto di minimo x_m ed un punto di massimo x_M. Quindi

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall \quad x \in [a,b].$$

Per la monotonia dell'integrale,

$$\int_a^b f(x_m)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x_M)\,dx$$

$$(b-a)\,f(x_m) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)\,f(x_M)$$

$$(b-a)\,f(x_m) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)\,f(x_M)$$

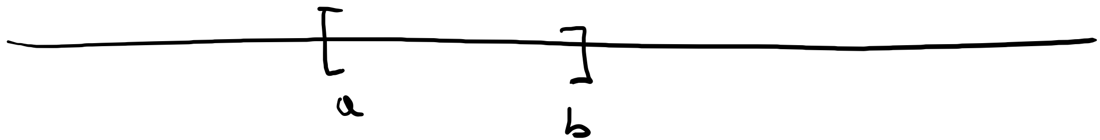
$$f(x_m) \leq \fint_a^b f(x)\,dx \leq f(x_M).$$

Per il teorema dei valori intermedi esiste un c tra x_m e x_M t.c.

$$f(c) = \fint_a^b f(x)\,dx$$

Def (Localmente integrabile) Sia I un intervallo e sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che f è localmente integrabile in I, e scriviamo $f \in L_{loc}(I)$, se $f \in L[a,b]$ $\forall$ intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subseteq I$.

Es Se $f \in C^0(\mathbb{R}) \Longrightarrow f \in L_{loc}(\mathbb{R})$



Infatti $\forall\, [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $f \in C^0(\mathbb{R}) \Longrightarrow f \in C^0([a,b])$

$\Longrightarrow f \in L[a,b]$.

2) f monotona in $\mathbb{R} \Longrightarrow f \in L_{loc}(\mathbb{R})$

Infatti $\forall\, [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, f monotona in $\mathbb{R} \Longrightarrow f$ monotona in $[a,b] \Longrightarrow f \in L[a,b]$.