CORSO DI SISTEMI DINAMICI
A.A 2020/2021

3 dicembre 2020

Homework 1

Modalità di consegna: invio a mezzo di posta elettronica di un documento in formato *pdf* e dell'eventuale codice Matlab agli indirizzi *t.parisini@gmail.com, fenu@units.it,*. Il messaggio dovrà avere per oggetto: *[SD20202021] HW 1 Nome Cognome*. In caso di lavori di gruppo, il documento dovrà riportare i nomi di tutti gli elementi del gruppo. In caso di invio di codice Matlab, esso potrà essere contenuto in una cartella compressa. Il documento *pdf* invece NON dovrà essere compresso (ad esempio, Allegato 1: *HW1 NomeCognomeRelazione.pdf*, Allegato 2: *HW1 NomeCognomeCodice.zip*).

Termine ultimo per la consegna: 21 dicembre 2020.

Esercizio 1

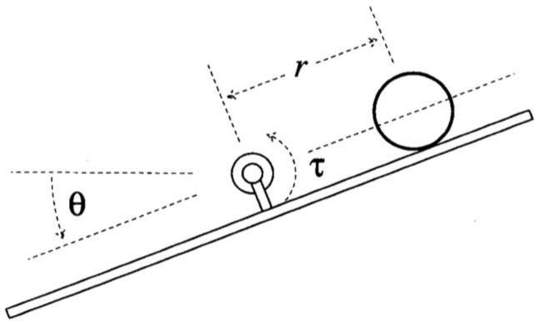

Figura 1: Sistema asta–sfera

Si consideri il sistema asta–sfera in figura, in cui un'asta ruota su un piano verticale sottoposta a una coppia τ e una sfera rotola su di essa (il moto sia di puro rotolamento). La distanza fra la cerniera e l'asta è pari al raggio R della sfera. Sia M la massa della sfera e J il momento di inerzia dell'asta rispetto alla cerniera e si assuma che il centro di massa dell'asta coincida con la cerniera. Nell'ipotesi che la sfera sia in ogni istante in contatto con l'asta, la configurazione del sistema asta–sfera è univocamente determinata noti che siano l'angolo θ di inclinazione dell'asta e l'ascissa r del centro della sfera lungo l'asta.

1. Si individui una rappresentazione di stato del sistema, assumendo l'angolo $\theta(t)$ come ingresso e l'ascissa $r(t)$ della sfera come uscita (ciò significa ignorare la dinamica dell'asta, assumendo che la sua inclinazione sia una variabile manipolabile, cioè un ingresso). Si indichi con g l'accelerazione di gravità.

2. Si individui una rappresentazione di stato del sistema, assumendo la coppia $\tau(t)$ come ingresso e l'ascissa $r(t)$ della sfera come uscita.

3. Si individui l'unico (a meno della periodicità dell'angolo θ) stato di equilibrio corrispondente all'ingresso costante $\tau(t) = \bar{\tau} = 0$.

4. Si discretizzi la rappresentazione in equazioni di stato a tempo continuo ottenuta in precedenza, facendo uso del metodo di Heun[1] (o regola trapezoidale esplicita) per trasformare le equazioni differenziali a tempo continuo in equazioni alle differenze finite. Si scelga opportunamente il passo di discretizzazione (l'intervallo di tempo di campionamento), motivando adeguatamente le scelte fatte.

5. Si determini anche per la rappresentazione in equazioni di stato a tempo discreto appena ottenuta lo stato di equilibrio (a meno della periodicità dell'angolo ϑ) in corrispondenza dell'ingresso costante $\tau(t_k) = \bar{\tau} = 0$.

6. Assumendo $M = 0.05\,\mathrm{Kg}$, $R = 0.01\,\mathrm{m}$, $J = 0.02\,\mathrm{Kg\ m^2}$ e $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$, si simuli il sistema al calcolatore, confrontando l'evoluzione a tempo continuo con quella ottenuta dalle equazioni alle differenze. In particolare, si calcolino e si traccino gli andamenti nel tempo di $r(t)$, $\theta(t)$

[1] Si veda ad es. il testo: Quarteroni A., Saleri F., Gervasio P. *Scientific Computing with MATLAB and Octave.* Texts in Computational Science and Engineering, 2006, Springer, Berlin, Heidelberg.

e rispettivamente $r\left(t_k\right)$, $\theta\left(t_k\right)$ a partire dallo stato di equilibrio individuato ai punti precedenti. Nel caso a tempo continuo si consideri l'ingresso:

$$\tau(t) = A\cos(\frac{\pi}{5}t), \quad A = 5 \cdot 10^{-3}\mathrm{Nm}.$$

Per la rappresentazione a tempo discreto l'ingresso sarà ovviamente:

$$\tau(t_k) = A\cos(\frac{\pi}{5}t_k), \quad A = 5 \cdot 10^{-3}\mathrm{Nm} \quad t_k = k\Delta\ ,\ k = 0,\ 1,\ 2\ldots$$

con Δ pari all'intervallo di tempo di campionamento (il passo di discretizzazione) scelto in precedenza.

Esercizio 2

Si dimostri che **se** lo stato di equilibrio $\bar{x} = 0$ $(\bar{x} \in \mathbb{R}^n)$ del sistema

$$x(k+1) = e^A\, x(k) \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

è asintoticamente stabile **allora** anche lo stato di equilibrio $\hat{x} = 0$ del sistema

$$\dot{x}(t) = A\, x(t)$$

è asintoticamente stabile.