

ANOMALIE

- Una teoria ha un'ANOMALIA se "una simmetria della teoria classica non è più una simmetria nella teoria / quantistica corrispondente".

invarianza di L sotto certe trasformazioni

$$\leftrightarrow \text{c'è una corrente conservata } \partial_\mu j^\mu = 0$$

↑
qta è la condizione che non è più valida nella teoria quantistica se c'è l'anomalia.

- Una simmetria nell'azione classica



se non c'è anomalia

ID. DI WARD

c'è una relazione tra i
correlatori

L'ANOMALIA è una violazione nelle IDENTITÀ DI WARD.

Consideriamo la lagrangiana per un fermione di Dirac

$$L = \bar{\Psi} (i \not{\partial} - m) \Psi$$

Definiamo le seguenti quantità:

CORRENTE VETTORIALE $j^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$

CORRENTE ASSIALE $j_A^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \Psi$

PSEUDO-SCALARE $P = \bar{\Psi} \gamma_5 \Psi$

Eq. del moto

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi = 0 \quad \bar{\psi}(i\overleftarrow{\cancel{\partial}} + m) = 0$$

⇒ CONSERVATION RULES:

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu &= \bar{\psi} \overleftarrow{\cancel{\partial}} \psi + \bar{\psi} \cancel{\partial} \psi = \\ &= im \bar{\psi} \psi + \bar{\psi} (-im \psi) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu j_A^\mu &= i \bar{\psi} \overleftarrow{\cancel{\partial}} \gamma_5 \psi + i \bar{\psi} \cancel{\partial} \gamma_5 \psi = \\ &= im \bar{\psi} \gamma_5 \psi - \bar{\psi} \gamma_5 (-im \psi) = \\ &= 2im \bar{\psi} \gamma_5 \psi = 2im P \end{aligned}$$

SIMMETRIE

$$\psi \mapsto e^{i\alpha} \psi \quad U(1)_V$$

$$\psi \mapsto e^{i\beta \gamma_5} \psi \quad U(1)_A$$

↳ è una simmetria di \mathcal{L} solo quando $m=0$. (*)

$$\begin{aligned} (*) \quad \mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi &\mapsto \bar{\psi} e^{i\beta \gamma_5} (i\cancel{\partial} - m) e^{i\beta \gamma_5} \psi = \bar{\psi} (i\cancel{\partial}) \psi - m \bar{\psi} e^{2i\beta \gamma_5} \psi \\ \psi &\mapsto e^{i\beta \gamma_5} \psi \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \mapsto \psi^\dagger e^{-i\beta \gamma_5} \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 e^{i\beta \gamma_5} = \bar{\psi} e^{i\beta \gamma_5} \end{aligned}$$

$$\psi = \psi_L + \psi_R$$

Spinori di Dirac è una RAPPRES. RIDUCIBILE del gruppo di Lorentz (si spetta in invce dai spinori di Weyl)

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi \quad \gamma_5 \psi_L = \psi_L$$

$$\psi_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi \quad \gamma_5 \psi_R = -\psi_R$$

$\psi_{L,R}$ sono SPINORI CHIRALI (o a CHIRALITA' definita)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi = \bar{\psi}_L i\cancel{\partial} \psi_L + \bar{\psi}_R i\cancel{\partial} \psi_R - m(\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L)$$

$$(P_\pm \equiv \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)) \text{ sono proiettori, cioè } P_\pm^2 = P_\pm \text{ e } P_+ + P_- = 1$$

Se $m=0$, allora ci sono due conservanti costruite

$$j_L^\mu = i \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L = \frac{1}{2}(j^\mu + j_A^\mu) \quad \longleftrightarrow$$

$$\psi_L \mapsto e^{i\Lambda_L} \psi_L \quad \psi_R \mapsto \psi_R$$

$$j_R^\mu = i \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R = \frac{1}{2}(j^\mu - j_A^\mu) \quad \longleftrightarrow$$

$$\psi_L \mapsto \psi_L \quad \psi_R \mapsto e^{i\Lambda_R} \psi_R$$

Se prendiamo N fermioni di Dirac, la Lagrangiana ($\mu \rightarrow \infty$)
 è invariante sotto il gruppo $SU(N)_V \times SU(N)_A \times U(1)_V \times U(1)_A$

$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$ sta in rep. fondam. (N)
 di $SU(N)_V$ e $SU(N)_A$

simmetrie vira
 sopra

$$\mathcal{L} = i \bar{\psi} \not{\partial} \psi = i \bar{\psi}_k \not{\partial} \psi_k$$

$k=1, \dots, N$

$V: \psi \mapsto e^{i\alpha} \psi$ dove $\alpha = \alpha^a t_N^a$

$A: \psi \mapsto e^{i\beta \gamma_5} \psi$ dove $\beta = \beta^a t_N^a$

↓

$$j^{\mu a} = \bar{\psi} \gamma^\mu t_N^a \psi \quad a=1, \dots, \dim SU(N) = N^2 - 1$$

$$j_A^{\mu a} = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 t_N^a \psi$$

IDENTITÀ DI WARD e ANOMALIE

La validità delle leggi di conservazione classica induce
 delle RELAZIONI tra i vari CORRELATORI delle
 teorie quantistiche via W.I.

Consideriamo una simm.-densa con $\partial_\mu j^\mu = 0$, allora
 uno si aspetta

$$\partial_\mu^x \langle 0 | T j^\mu(x) O^1(y_1) \dots O^n(y_n) | 0 \rangle = 0 + \text{contact terms}$$

W.I. sono importanti per dimostrare diverse proprietà
 della teoria, inclusa la sua rinormalizzabilità.

Nella teoria con $\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\partial - m) \Psi$, $d=4$, si sono interessati ai seguenti correlatori

$$\langle j^\mu(x) j^\nu(y) j_A^\lambda(z) \rangle \quad \text{e} \quad \langle j^\mu(x) j^\nu(y) P(z) \rangle$$

↑ dipendono dalle differenze $x-y, x-z, \dots$ in conseguenza del quadrinvar. (inv. in trasl.)

Le W.I. da cui aspettiamo sono

VECTOR W.I. $\partial_\mu^x \langle j^\mu(x) j^\nu(y) j_A^\lambda(z) \rangle = 0$

AXIAL W.I. $\partial_\lambda^z \langle j^\mu(x) j^\nu(y) j_A^\lambda(z) \rangle = 2im \langle j^\mu(x) j^\nu(y) P(z) \rangle$

Nello spazio dei momenti:

$$T^{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, q) \equiv i \int d^4x d^4y d^4z e^{ik_1x + ik_2y - iqz} \langle j^\mu(x) j^\nu(y) j_A^\lambda(z) \rangle$$

$$T^{\mu\nu}(k_1, k_2, q) \equiv i \int d^4x d^4y d^4z e^{ik_1x + ik_2y - iqz} \langle j^\mu(x) j^\nu(y) P(z) \rangle$$

Differentiamo i correlatori:

$$q_\lambda T^{\mu\nu\lambda} = \int d^4x d^4y d^4z e^{ik_1x + ik_2y - iqz} \partial_\lambda^z \langle j^\mu(x) j^\nu(y) j_A^\lambda(z) \rangle$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} 2mi \int d^4x d^4y d^4z e^{ik_1x + ik_2y - iqz} \langle j^\mu(x) j^\nu(y) P(z) \rangle =$$

se W.I. è soddisfatta

$$= 2m T^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \text{AXIAL W.I. (AWI)} : q_\lambda T^{\mu\nu\lambda} = 2m T^{\mu\nu}$$

Analogamente differenzando in x e y otteniamo

$$\Rightarrow \text{VECTOR W.I. (VWI)} : k_{1\mu} T^{\mu\nu\lambda} = k_{2\nu} T^{\mu\nu\lambda} = 0$$

Qte id. sono ciò che ci aspetteremo sulla base delle simmetrie dell'azione classica.

Ci si può calcolare i commutatori $T^{\mu\nu\lambda}$ e $T^{\mu\nu}$ nella teoria quantistica (in es. usando le regole di Feynman) e controllare che le WI siano soddisfatte.

Se non sono soddisfatte \rightarrow ANOMALIA

Facendo pb, si ottiene il seguente risultato (che dimostreremo a breve) :

se la VWI è soddisfatta, allora la AWI è ANOMALA
e viceversa se la AWI è preservata, allora la VWI è ANOMALA.