Teorema di Binet $\quad A, B \in M_n(\mathbb{K}) \Longrightarrow \det(AB) = \det A \det B$

(det è multiplicativo)

Cofattore $\quad A = (a_{ij}) \rightsquigarrow a_{ij}^* \overset{def}{=} (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ cofattore di a_{ij}

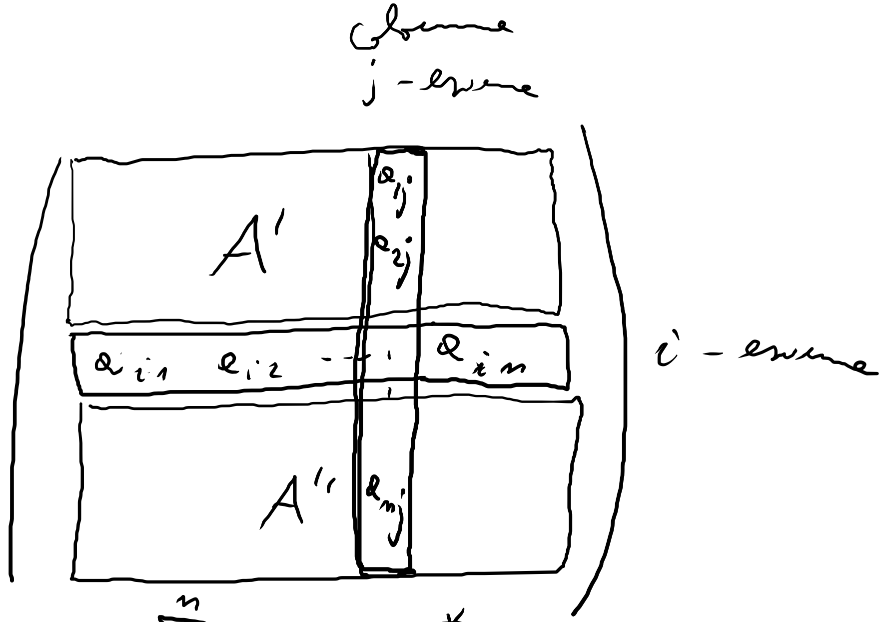
$A \in M_n(\mathbb{K})$

$M_{n-1}(\mathbb{K}) \ni A_{ij}$ matrice ottenuta da A eliminando la riga i e la colonna j

$$\operatorname{cof} A = A^* \overset{def}{=} {}^t(a_{ij}^*)$$

Formula di Laplace

$A \in M_n(\mathbb{K})$

$A =$ 

$$\underset{n}{\det A} = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{i+h} a_{ih} \underset{n-1}{|A_{ih}|} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih}\, a^{*}_{ih}$$

(sviluppo di det A secondo la i-esima riga)

$$\det = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{j+h} a_{hj} \, |A_{hj}| = \sum_{h=1}^{n} a_{hj}\, a^{*}_{hj}$$

(sviluppo di det A secondo la j-esima colonna)

Esempio

1) $$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -11 - 48 = -59$$

2) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left(-2(-11) + 13\right) - 2 \cdot 12 = 70 - 24 = 46$$

Dimostrazione della formula di Laplace

<u>1° step</u>

Sviluppo secondo la 1ª riga

Verifichiamola in questo caso particolare

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \ \cdots \ 0 \\ \hline a_{21} & \\ \vdots & A' = A_{11} \\ a_{n1} & \end{array} \right)$$

$$a_{1j} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = 1 \\ 0 & \text{se } j \geq 2 \end{cases}$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \underbrace{a_{1\sigma(1)}}_{\substack{\parallel \\ 0 \text{ se } \sigma(1) \neq 1}}\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \boxed{\sum_{\substack{\sigma \in \Sigma_n \\ \sigma(1)=1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \underbrace{a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}}_{\text{non compare indice } 1}} = \det A' = 1 \cdot |A_{11}|$$

$$\boxed{A' = A_{11}}$$

2° step

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline \underbrace{\boxed{\quad A' \quad}}_{i-1} & \begin{matrix} a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{matrix} & \boxed{\quad A'' \quad} \end{array}\right)$$

i-esima colonna

$$(A' \mid A'') = A_{1i}$$

Con $(i-1)$ scambi di colonne otteniamo

$$B = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 \cdots & 0 \\ \hline \begin{matrix} a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{matrix} & \boxed{\; A' \;} & \boxed{\; A'' \;} \end{array}\right)$$

$$\det A = (-1)^{i-1} \det B = (-1)^{i-1} \left| A' \mid A'' \right| = (-1)^{i+1} \left| A_{1i} \right|$$

3° step

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} A' & * & A'' \\ 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ B' & * & B'' \end{pmatrix} \\ j\text{-esima colonna} \end{array} \begin{array}{l} \Big\} \, (i-1) \text{ scambi} \\ \\ i\text{-esima riga} \end{array}$$

Si riduce al caso 2 $\rightsquigarrow$ $B = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ \begin{matrix} A' \\ B' \end{matrix} & * & \begin{matrix} A'' \\ B'' \end{matrix} \end{pmatrix}$

$$\det A = (-1)^{i-1} \det B =$$

$$= (-1)^{j-1}(-1)^{i-1} \begin{vmatrix} A' & A'' \\ B' & B'' \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

formula di Laplace sulla i-esima riga di A

4° step (caso generale)

$$A \in M_n(\mathbb{K})$$

$$A = \begin{pmatrix} A' \\ a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in} \\ A'' \end{pmatrix}$$ i-esima riga

$$A^{(i)} = a_{i1} e_1 + a_{i2} e_2 + \cdots + a_{in} e_n$$

$(e_1, \dots, e_n)$ base canonica di $\mathbb{K}^n$ (vettori riga)

Verifichiamo la formula di Laplace per lo sviluppo secondo la i-esima riga

Multilinearità di det

$$\det A = a_{i1} \underbrace{\begin{vmatrix} A' \\ e_1 \\ A'' \end{vmatrix}}_{(-1)^{i+1}|A_{i1}|} + a_{i2} \overbrace{\begin{vmatrix} A' \\ e_2 \\ A'' \end{vmatrix}}^{(-1)^{i+2}|A_{i2}|} + \cdots + a_{in} \overbrace{\begin{vmatrix} A' \\ e_n \\ A'' \end{vmatrix}}^{(-1)^{i+n}|A_{in}|}$$

i det sono come nel caso 3 ✓

$$\xrightarrow[\text{riga}]{i\text{-esima}} \begin{vmatrix} A' \\ e_j \\ A'' \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \underbrace{\begin{vmatrix} B' & B'' \\ C' & C'' \end{vmatrix}}_{= |A_{ij}|}$$

come nel caso 3

$$\begin{vmatrix} A' \\ A'' \end{vmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} B' & & B'' \\ 0\ 0 & 1 & 0\ 0 \\ C' & & C'' \end{pmatrix}$$

Esempio

$$\begin{vmatrix} 3 & i & -1 \\ 0 & 2 & 3i \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & -1 \\ 2 & 3i \end{vmatrix} = -3+2 = -1$$

(Laplace)

Gauss-Jordan

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3i \\ 3 & i & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3i \\ 0 & i & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3i \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -1$$

3° esercizio, foglio 8

$\sigma \in \Sigma_n$ k- ciclo $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma^k = id}$

$\sigma^k = \underbrace{\sigma \cdot \sigma \cdot \ldots \cdot \sigma}_{k \text{ volte}}$

$\sigma = (i_1 \; i_2 \; \ldots \; i_k)$

$\underline{\sigma^k(j) = j}$ se $j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$

$\underline{\sigma^k(i_1)} = i_1$ $\quad \underbrace{i_1 \xrightarrow{\sigma} i_2 \xrightarrow{\sigma} i_3 \to \ldots \xrightarrow{\sigma} i_k}_{k-1 \text{ volte}} \xrightarrow{\sigma} i_1$

$\sigma^k(i_2) = i_2$ $\quad \underbrace{i_2 \xrightarrow{\sigma} i_3 \xrightarrow{\sigma} i_4 \xrightarrow{\sigma} \ldots \xrightarrow{\sigma} i_k}_{k-2 \text{ volte}} \xrightarrow{\sigma} i_1 \xrightarrow{\sigma} \underline{i_2}$

$\vdots$

$\sigma^k(i_j) = i_j \quad \forall j$

$\Rightarrow \sigma^k(s) = s$
$\forall s \in \{1, \ldots, n\}$

Induzione su n

$\underline{n = 1}$ $\quad \Sigma_1 = \{id\}$ ovvio (base dell'induzione)

Supponiamo che sia vero su Σ_m $\forall\ m < n$, $n > 1$

$\sigma \in \Sigma_n$ k-ciclo

$\sigma = (i_1 \ i_2 \ \dots \ i_k)$

5 – foglio 8

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}$$

$$\to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ t & -2 & -1 \\ 3 & 0 & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{t}{2}-2 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & t \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & t \\ 0 & \frac{t}{2}-2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & t \\ 0 & 0 & \frac{-2t}{\frac{t}{2}-2} - 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A(t) = - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} t & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + t(t-4) =$$

$$= \underline{\underline{t^2 - 4t + 3}}$$

$\operatorname{rg} A(t) =$