Derivate successive

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in A. (A aperto)

È dunque definita la funzione DERIVATA PRIMA di f $\quad \dfrac{df}{dx} = f': A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Se la funzione derivata prima $f' = \dfrac{df}{dx}$ è a sua volta derivabile (in $A' \subseteq A$), ossia se $\forall\ x_0 \in A'$ esiste finito il limite del rapporto incrementale di f' in x_0,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

allora diremo che f è due volte derivabile in A'

e indicheremo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} =$$

$$= \boxed{(f')'(x_0)} =: f''(x_0) = \boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)(x_0)} =$$

$$= \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$$

In tal caso $f'' : A' \subseteq A \to \mathbb{R}$

e se possibile calcolarlo, $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = \frac{d^3 f}{dx^3} = (f'')'(x) = f'''(x)$

In generale, se esiste, la derivata n-sima di f si indica con $f^{(n)}$ o $\frac{d^n f}{dx^n}$ $(n \geq 1)$

Esempi

f	f'	f''	
e^x	e^x	e^x	...
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	...
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$-\cos x$	...
x^n	nx^{n-1}	$n(n-1)x^{n-2}$	...

$n \in \mathbb{N}$

$$\frac{d^n}{dx^n} e^x = e^x \quad \forall n$$

ES $f(x) = x^5$ $f'(x) = 5x^4$ $f''(x) = 20x^3$ $f'''(x) = 60x^2$

$f^{IV}(x) = 120x$ $f^{V}(x) = 120$ $f^{VI}(x) = 0$

$$f(x) = x^{3/2} \qquad \underline{\mathrm{Dom}\, f = \{x \in \mathbb{R} \quad x \geq 0\}}$$

$$= \sqrt{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2} = \frac{3}{2} \sqrt{x} \qquad \underline{\mathrm{Dom}\, f' = \mathrm{Dom}\, f}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4} x^{-1/2} = \frac{3}{4} \underline{\frac{1}{\sqrt{x}}} \qquad \mathrm{Dom}\, f'' = \{x \in \mathbb{R} \quad x > 0\}$$

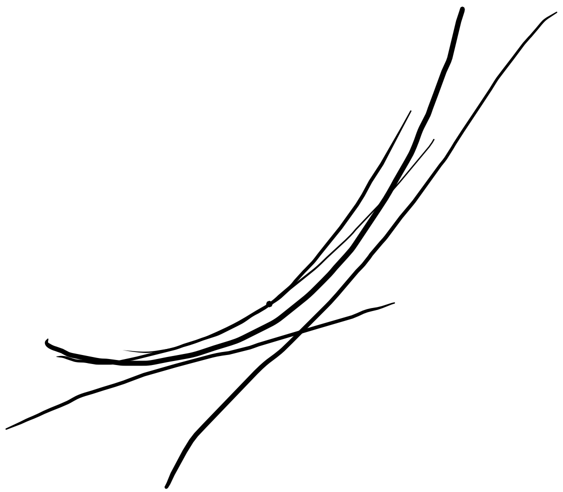
Criterio di convessità (concavità)

(rivisto con l'utilizzo della definizione di derivata seconda di f)

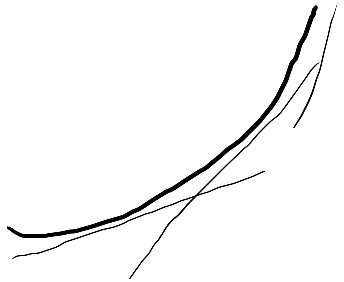
Supponiamo f due volte derivabile in]a,b[.

Allora sono equivalenti

1. f è convessa in]a,b[(concava)
2. f' è crescente in]a,b[(decrescente)
3. f'' è positiva (negativa)

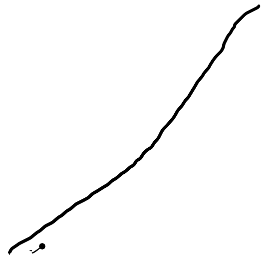


f



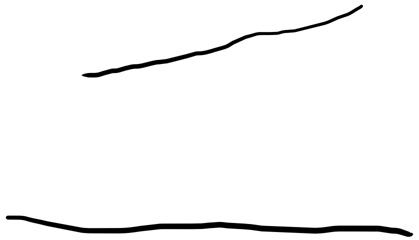
convexe

f'



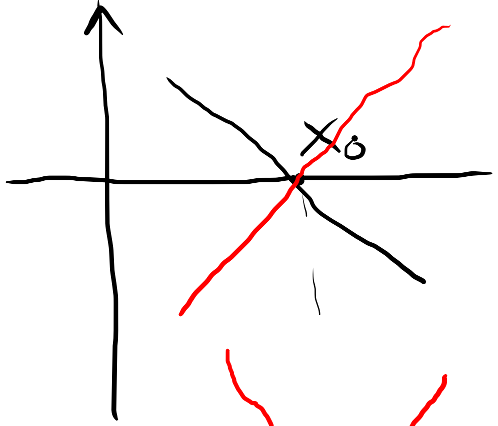
crescente

f''

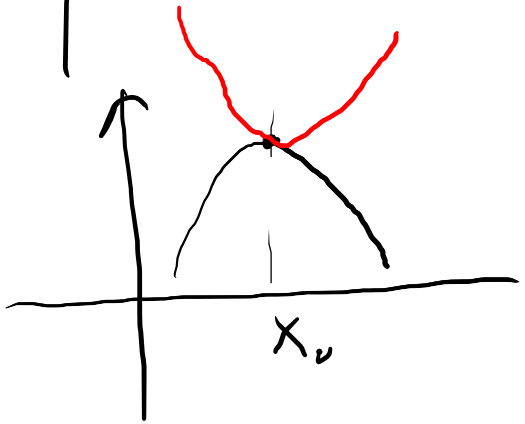


positiva

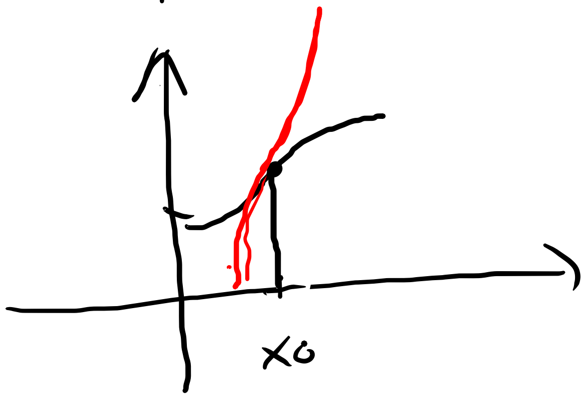
f''



f'

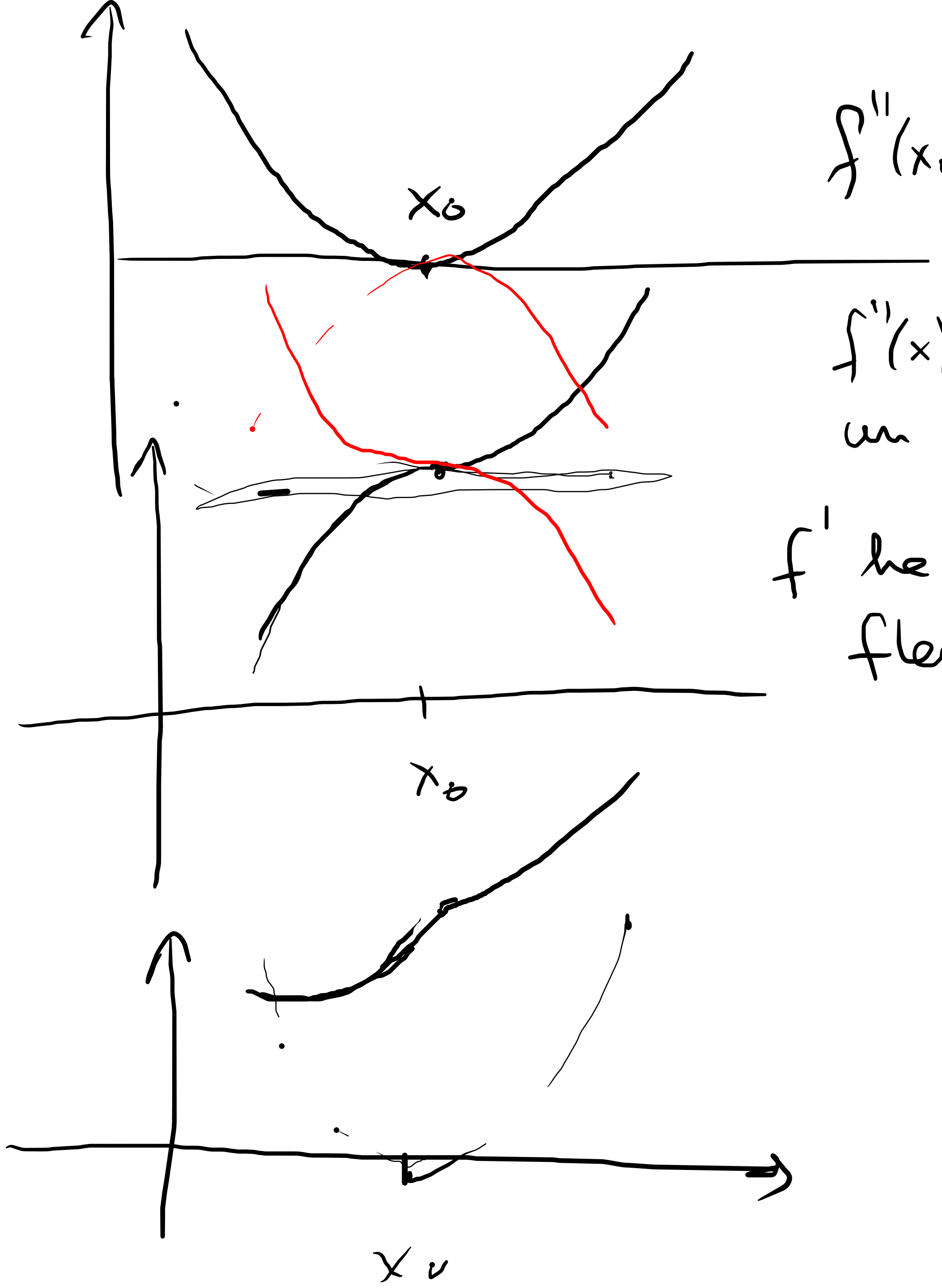


f



I punti in cui f'' si annulla e in un loro intorno f'' cambia segno corrispondono a punti in cui il grafico di f cambia la convessità/concavità e sono detti <u>flessi</u> (non necessariamente orizzontali!).

f''



$f''(x_0)=0$

$f''(x) \geq 0$ in un intorno di x_0

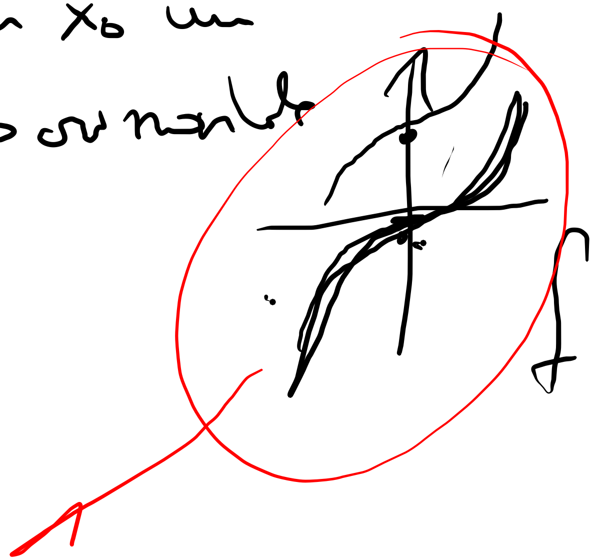
f' ha in x_0 un flesso orizzontale

f'

f

$f''(x)=x^2$

$f'(x)=\dfrac{x^3}{3}$

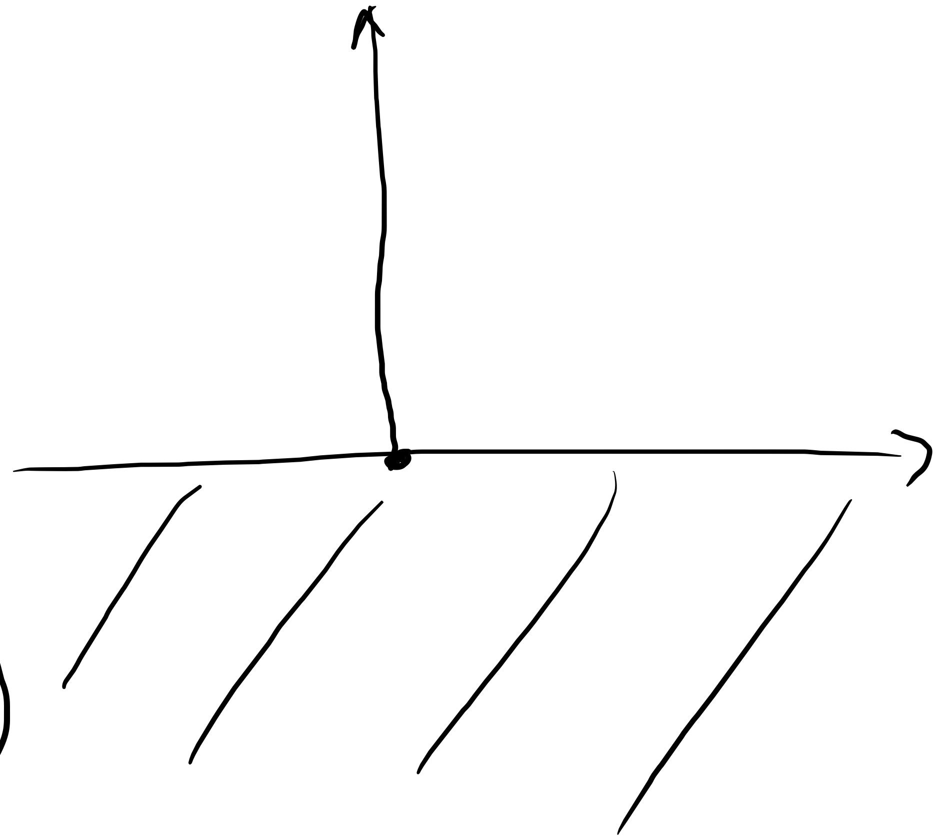


$f(x)=\dfrac{x^4}{12}$

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x} = \qquad \mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$$

$$= \frac{x^2}{e^x}$$

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(0) = 0$$



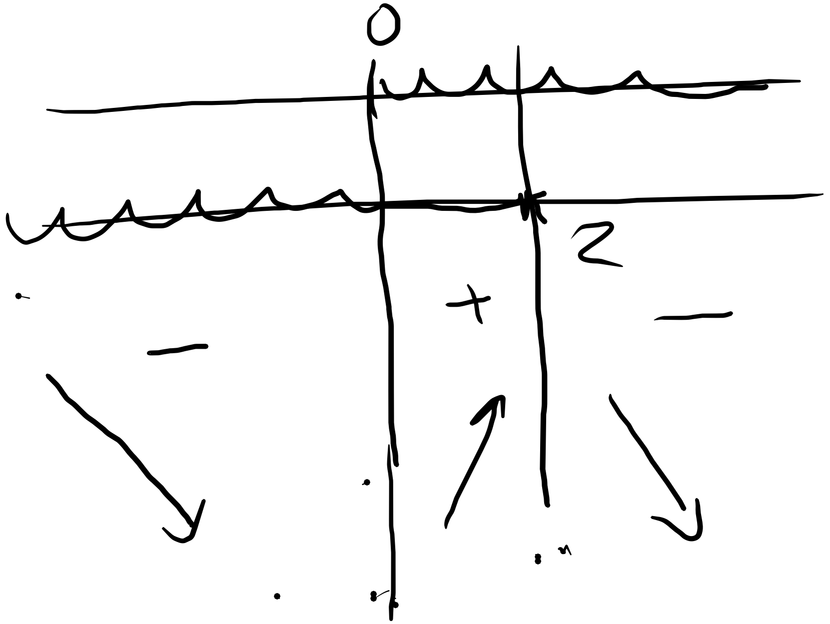
$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot (-1) \cdot e^{-x}$$

$$= e^{-x}(2x - x^2) = \underline{\underline{x}} \cdot e^{-x} \cdot \underline{\underline{(2-x)}}$$

positivo $\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \iff x = 0 \quad x = 2$

$f'(x) > 0$



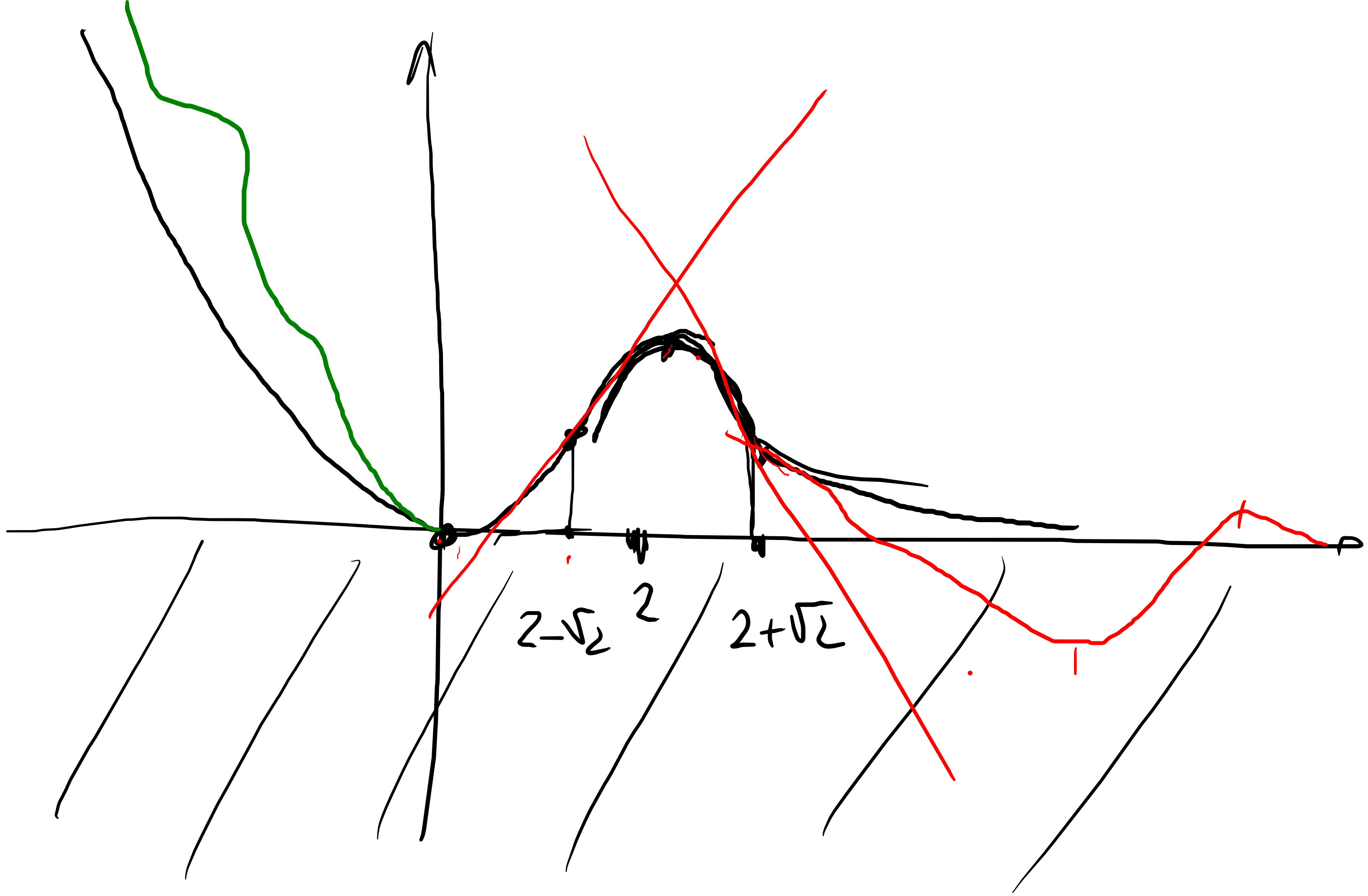
$x > 0$

$2 - x > 0$

$f(0) = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 \cdot e^{-x} = +\infty$$



$2-\sqrt{2}$
2
$2+\sqrt{2}$

Teorema (Regola) di de L'Hôpital

Supponiamo f e g definite e derivabili in un intorno di x_0 (privato eventualmente di x_0) e infinitesime per $x \to x_0$ (infinite)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \text{ o } -\infty \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix} \right)$$

Allora se $g'(x)$ diverso da zero in tale intorno ed esiste il $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

Applicazioni

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x}$$

Rapporto
Regola di
L'Hôpital

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = e^x$$

$$f'(x) = 2x \qquad g'(x) = e^x \neq 0 \quad \forall x$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x}$$

$$f''(x) = 2$$

$$g''(x) = e^x$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Esempio

$\boxed{x_0 = 0}$

$f(x) = x^2 \cdot \text{sen}\,\frac{1}{x}$

$g(x) = \text{arctg}\, x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot \text{sen}\, 1/x}{\text{arctg}\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Benché $\lim_{x \to 0} \text{sen}\, 1/x$ NON ESISTA

essendo $\text{sen}\, 1/x$ limitata

e $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0$

Oss f non è definita in $x_0 = 0$ ma è derivabile in un qualunque intorno di $x_0 = 0$.

g è derivabile (in un intorno di x_0)

$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad \lim_{x \to 0} g(x) = 0$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2 \cdot \operatorname{sen} 1/x\right) = 2x \cdot \operatorname{sen} 1/x + x^2 \cdot \left[\cos\frac{1}{x}\right] \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2x \operatorname{sen} 1/x - 1 \cdot \cos\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x \operatorname{sen} 1/x - \cos 1/x}{\frac{1}{1+x^2}}$$

NON ESISTE!

Attenzione

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{arctg} x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{arctg} x} \cdot \left(x \operatorname{sen} 1/x \right) = 0$$

tende a 1

è infinitesimo

Applicando la Regola di de L'Hôpital

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x \to 0} 1+x^2 = 1}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = ?$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0}$$

$$x \ln x = \frac{\overbrace{\ln x}^{= f}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{= g}}$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\frac{\cos x}{1} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$

$$\frac{e^x}{1} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$

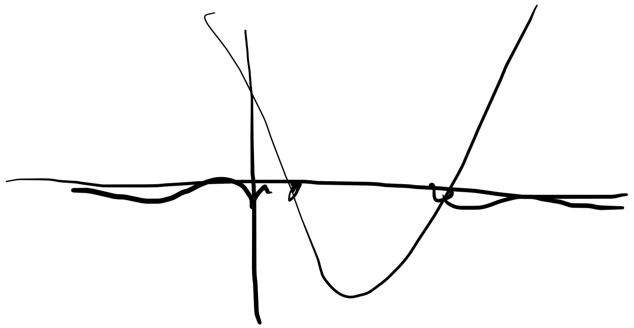
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \qquad \forall n$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(x \cdot e^{-x}(2-x) \right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(e^{-x}(2x - x^2) \right) = -e^{-x} \cdot (2x - x^2) + (2-2x) \cdot e^{-x}$$

$$= e^{-x}(2 - 2x - 2x + x^2)$$

$$= \underbrace{e^{-x}}_{>0\ \forall x}\,\underline{(2 - 4x + x^2)}$$



$f''(x) = 0 \iff 2 - 4x + x^2 = 0$

$\iff x_1 = \frac{4 + \sqrt{8}}{2} = 2 + \sqrt{2}$

$x_2 = \frac{4 - \sqrt{8}}{2} = 2 - \sqrt{2}$

$f''(x) > 0$

se $x < 2 - \sqrt{2}$

$x > 2 + \sqrt{2}$