4 Dicembre

<u>Teor</u> $f \in L[a,b]$. Allora $|f| \in L[a,b]$

Inoltre si ha

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \,. \quad (1)$$

(Ricordare $\left| \sum_{j=1}^{n} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|$)

Dim di (1). Si parte

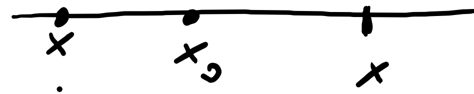
$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$. La monotonia dell'int. implica

$$-\left(\int_a^b |f(x)|\,dx\right) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \quad (2)$$

La (2) è equivalente a

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

che è la (1). $\square$



Definizione Sia $f \in L_{loc}(I)$ e sia $x_0 \in I$. Definiamo la funzione

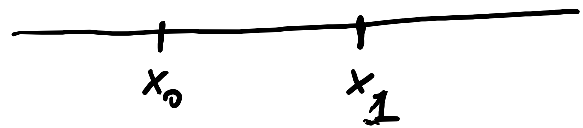
$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt : I \to \mathbb{R}$$

dove

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} \text{l'integrale di Darboux di } f \text{ in } [x_0, x], & \text{se } x > x_0 \\ 0 & \text{se } x = x_0 \\ -\int_{x}^{x_0} f(t)\,dt & \text{se } x < x_0 \end{cases}$$

<u>Teor</u> Sia $f \in L_{loc}(I)$. Allora la funzione $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ definita sopra è continua in I.

Teor Sia $f \in L_{loc}(I)$, e per $x_0 \in I$ definiamo $F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$. Supponiamo che in un punto $x_1 \in I$ esista e sia finito $f(x_1^+) = \lim_{x \to x_1^+} f(x)$



Allora $\exists\ F'_d(x_1)$ e si ha

$$F'_d(x_1) = f(x_1^+).$$

Analogamente, se esiste finito $f(x_1^-) = \lim_{x \to x_1^-} f(x)$, si ha $F'_s(x_1) = f(x_1^-)$

Se, in particolare, $f(x)$ e' continua in x_1, allora $F'(x_1) = f(x_1)$.

Se in particolare $f \in C^0(I)$, allora

$$F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in I.$$

<u>Dim</u> Dimostreremo solo che se $f(x_1^+)$ esiste finito, allora $F_d'(x_1) = f(x_1^+) \left(\doteq \lim_{x \to x_1^+} f(x) \right)$

Ricordiamo che $f(x_1^+) = \lim_{x \to x_1^+} f(x)$ significa che

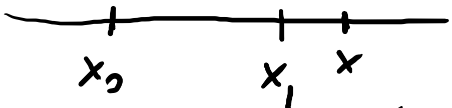
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \quad t.c. \quad x_1 < x < x_1 + \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x_1^+) - f(x)| < \varepsilon.}$$

Dimostrare $F'_d(x_1) = f(x_1^+)$ significa dimostrare che

$$\lim_{x \to x_1^+} \left[\frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1^+) \right] = 0$$

$$\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} - f(x_1^+) = \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt}{x-x_1} - f(x_1^+)$$

Ora utilizziamo $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt + \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt$



$$= \frac{\cancel{\int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt} + \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt - \cancel{\int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt}}{x-x_1} - f(x_1^+)$$

$$= \frac{\int_{x_1}^{x} f(t)\,dt - f(x_1^+)(x-x_1)}{x-x_1} = \frac{\int_{x_1}^{x} f(t)\,dt - \int_{x_1}^{x} f(x_1^+)\,dt}{x-x_1}$$

$$\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1}-f(x_1^+)=\frac{\int_{x_1}^{x}\left(f(t)-f(x_1^+)\right)dt}{x-x_1}$$ Qui $x>x_1$

$$\left|\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1}-f(x_1^+)\right|=\frac{\left|\int_{x_1}^{x}\left(f(t)-f(x_1^+)\right)dt\right|}{x-x_1}$$

$$\underset{*}{\leq}\frac{\int_{x_1}^{x}|f(t)-f(x_1^+)|\,dt}{x-x_1}<\frac{\int_{x_1}^{x}\varepsilon\,dt}{x-x_1}=\frac{\varepsilon(x-x_1)}{x-x_1}=\varepsilon$$

Ricordiamoci che $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta_\varepsilon>0$ t.c. $x_1<y<x_1+\delta_\varepsilon\Rightarrow\underbrace{|f(y)-f(x_1^+)|}_{<\varepsilon}$

se in $*$ scelgo $x_1<x<x_1+\delta_\varepsilon\Rightarrow$ per $t\in(x_1,x)$ vale $x_1<t<x_1+\delta_\varepsilon\Rightarrow|f(t)-f(x_1^+)|<\varepsilon$

Partendo dalla proposizione

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } x_1 < x < x_1 + \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(x_1^+)| < \varepsilon$$

abbiamo dimostrato che per $x_1 < x < x_1 + \delta_\varepsilon$ si ha

$$\left| \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1^+) \right| < \varepsilon .$$

Questo $\forall \varepsilon > 0$. Cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } x_1 < x < x_1 + \delta_\varepsilon \Longrightarrow \left| \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1^+) \right| < \varepsilon \Longrightarrow \lim_{x \to x_1^+} \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} = f(x_1^+) .$$

$$\exists \ F'_d(x_1) = f(x_1^+)$$

Def Data $f: I \to \mathbb{R}$, una $g: I \to \mathbb{R}$ è detta una primitiva di f in I se

$$g'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

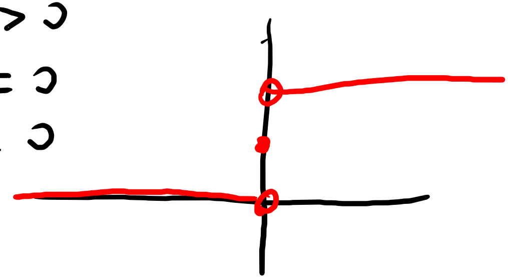
Una $f: I \to \mathbb{R}$ è primitivabile in I se ammette primitive in I.

Corollario $f \in C^0(I) \Longrightarrow f$ è primitivabile in I

perché posto $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, dove $x_0 \in I$,

si ha $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.

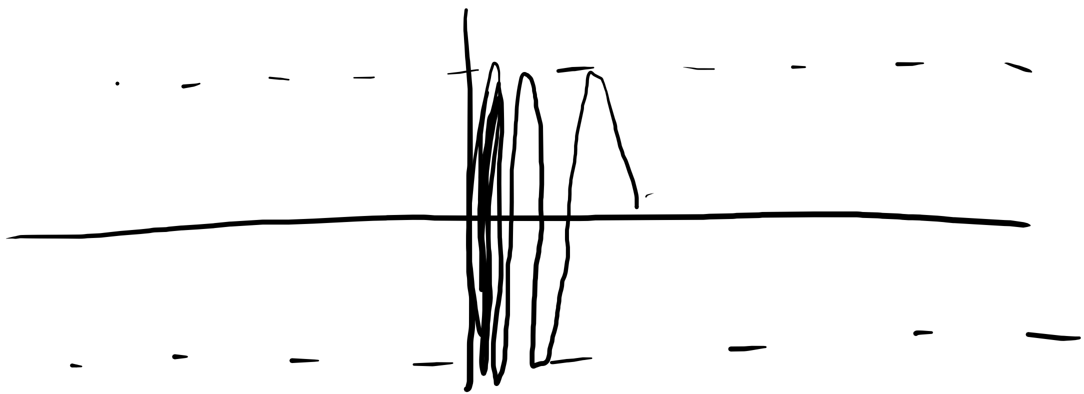
Esempi $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$



non è primitivabile in $\mathbb{R}$.

Esempio $\quad f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

è primitivabile.



<u>Lemma</u> Sia f primitivabile in I e sia g una sua primitiva. Allora tutte le altre primitive di f in I sono della forma $g + c$ dove c è una funzione costante in I.

Corollario (Teorema di Valutazione)

Sia $f \in C^0([a,b])$ e sia $G \in C^1([a,b])$ una primitiva di f in $[a,b]$. Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = G(x)\Big]_a^b$$

Dim Se consideriamo la $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Sappiamo $F'(x) = f(x) \quad \forall\ x \in [a,b]$, $F(a) = 0$

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - \underbrace{F(a)}_{0}$$

Un'altra primitiva di f è della forma

$$G(x) = F(x) + c.$$

$$G(b) - G(a) = \left(F(b) + \cancel{c}\right) - \left(F(a) + \cancel{c}\right) = F(b) - F(a)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

$\square$

$a \neq -1$ Primitiva

x^a, x^{-1}, e^x, $\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\sin x$, $\cos x$

$\frac{x^{a+1}}{a+1}+c$, $\lg|x|+c$, e^x+c, $\operatorname{artg} x+c$, $\arcsin x+c$, $-\cos x+c$, $\sin x+c$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{artg} 1 - \operatorname{artg} 0 = \operatorname{artg} x \Big]_0^1$$

$$= \operatorname{artg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$= (\operatorname{artg} x + c)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$\operatorname{ch} x \quad , \quad \operatorname{sh} x \quad , \quad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg} x \quad , \quad \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

$\operatorname{sh} x + c \quad , \quad \operatorname{ch} x + c \quad , \quad \operatorname{tg} x + c \quad , \quad \operatorname{th}(x) + c$

$$\int_0^1 (x^3 + 2x + 5)\, dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + x^2 + 5x\right)\Big]_0^1 = \frac{1}{4} + 1 + 5$$