Equazioni differenziali del primo ordine a

VARIABILI SEPARATE o SEPARABILI

Sono eq. differenziali che in forma normale si scrivono in questo modo

$$x' = \Phi(x,t) = g(x) \cdot h(t)$$

ossia $\Phi(x,t) = g(x) \cdot h(t)$

$x'(t) = -2t \cdot x(t)$ è a variabili separabili

$$\boxed{x(t) = C \cdot e^{-t^2}}$$

$$\Phi(x,t) = \overset{h(t)}{\overset{\shortparallel}{-2t}} \cdot \overset{g(x)}{\overset{\shortparallel}{x}}$$

$$\begin{cases} x' = \Phi(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$x'(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \underbrace{\frac{dx}{dt} = g(x)\cdot h(t)}$$

Se $g(x)$ diverso da 0, allora possiamo considerare

$$\frac{dx}{g(x)} = h(t)\cdot dt$$

e passare alla scrittura dei relativi integrali indefiniti, cioè consideriamo

$$G(x) \in \int \frac{dx}{g(x)} = \int h(t)\,dt = \{H(t) + C\}$$

$$G(x) = H(t) + C$$

e quindi se G è invertibile possiamo ricavare x come funzione di t

Esempio

$$x' = -2t \cdot x$$
$$\quad\;\; h(t) \quad g(x)$$

$x \neq 0$

$$\frac{dx}{x} = -2t\,dt$$

passando agli integrali indefiniti

$$\int \frac{dx}{x} = \int (-2t)\,dt$$

$$\left\{ \ln|x| + C \right\} = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\left\{ -t^2 + C' \right\} = \int (-2t)\,dt$$

$$G(x) = H(x) + C^*$$

$$\ln|x| = -t^2 + C^*$$

$$|x(t)| = e^{-t^2 + C^*}$$

$$= C \cdot e^{-t^2}$$

$x(t) = \tilde{C} \cdot e^{-t^2}$ se $C > 0$

$x(t) = \tilde{\tilde{C}} \cdot e^{-t^2}$ se $C < 0$

$x(t) \equiv 0$ se $C = 0$

Siccome una primitiva di e^{-t^2} non ha un'espressione in termini di funzioni elementari

$$x' = \underbrace{x \cdot e^{-t^2}}_{= \Phi(x,t)}$$

(che è a variabili separabili o separate)

non ammette un'espressione esplicita della soluzione generale.

$$\ln|x| = \int e^{-t^2}\,dt$$

$$\begin{cases} x' = 2tx^2 = \phi(x,t) = \underset{\substack{\| \\ x^2}}{g(x)} \cdot \underset{\substack{\| \\ 2t}}{h(t)} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$x \neq 0$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int 2t\,dt = \left\{ t^2 + \tilde{C} \right\}$$

$$\int x^{-2}\,dx = \left\{ \frac{1}{1-2} \cdot x^{1-2} + C \right\}$$

$$\boxed{-\frac{1}{x} = t^2 + C^*}$$

$$\boxed{x(t) = -\frac{1}{t^2 + C}}$$

$t_0 = 0 \quad x_0 = 1$

$1 = -\frac{1}{C} \Rightarrow C = -1$

$$\begin{cases} x' = 2t x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

$$C = -1$$

$$x(t) = \frac{-1}{t^2 + C} \Rightarrow x(t) = \frac{-1}{t^2 - 1} = \frac{1}{1 - t^2}$$

$$\begin{cases} x'(t) = 2t x^2 \\ x(2) = -1/3 \end{cases}$$

$$-1/3 = \frac{-1}{4 + c} \Rightarrow C = -1 \qquad x(t) = \frac{1}{1 - t^2}$$

$$\begin{cases} x'(t) = 2t x^2 \\ x(0) = -1 \end{cases}$$

$$t_0 = 0 \qquad x_0 = -1$$

$$-1 = \frac{-1}{0 + C} \qquad \boxed{C = 1} \qquad x(t) = \frac{-1}{1 + t^2}$$

$$\boxed{x'(t) = x(t) - t = \phi(x,t)}$$

NON è a variabili separabili!!

Equazioni differenziali lineari (del primo ordine)

Sono equazioni differenziali del tipo

$$a(t)\,x'(t) + b(t)\cdot x(t) + c(t) = 0$$

con a, b, c funzioni continue e $a \neq 0$

Ove $a \neq 0$, posso considerare l'espressione equivalente dell'eq. differenziale lineare proposta in forma normale, ovvero

$$x'(t) = \underbrace{-\frac{b(t)}{a(t)}}_{= B(t)} \cdot x(t) \underbrace{- \frac{c(t)}{a(t)}}_{= C(t)}$$

$$x'(t) = \underline{B(t) \cdot x(t)} + \underline{C(t)}$$

<u>Notare</u> $\underline{x'(t)} = x(t) - t$ è lineare con $\underline{B(t) \equiv 1}$

$$\underline{C(t) = -t}$$

Notiamo che se $C(t) \equiv 0$ $(c(t) \equiv 0)$ allora l'eq. differenziale lineare $x' = B(t) \cdot x(t)$ è a variabili separabili con $B = h$ $g(x) = x$

Se $C = 0$

$$x' = \underbrace{B(t)}_{h(t)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)}$$

Se $x \neq 0$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \int B(t)\, dt$$

$$\ln x = \mathcal{B}(t) + k$$

con $\mathcal{B}$ primitiva di B

$$\boxed{x(t) = \mathcal{C} \cdot e^{\mathcal{B}(t)}} = x(t) = C \cdot e^{\int B(t) dt}$$

Se $C \neq 0$, applicheremo il "METODO delle VARIAZIONI delle COSTANTI" (dovuto a Lagrange)

Se $C=0$

$$x(t) = C \cdot \underbrace{e^{B(t)}}$$

Se $C \neq 0$ $\boxed{x(t) = u(t) \cdot e^{B(t)}}$ con u derivabile

$$x'(t) = u'(t)\, e^{B(t)} + u(t) \cdot e^{B(t)} \frac{d}{dt} B(t)$$

$$= u'(t) \cdot e^{B(t)} + u(t)\, e^{B(t)} \cdot B'(t)$$

$$\frac{d}{dt} B(t) = B'(t)$$

Se x è soluzione dell'eq. differenziale lineare

$$x' = B(t)\,x(t) + C(t) = \cancel{B(t)\cdot u(t)\cdot e^{\mathcal{B}(t)}} + C(t)$$

$$\| $$

$$u'(t)\cdot e^{\mathcal{B}(t)} + \cancel{u(t)\,e^{\mathcal{B}(t)}\cdot B(t)}$$

$$\boxed{u(t)\cdot e^{\mathcal{B}(t)} = x(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$u'(t)\cdot e^{\mathcal{B}(t)} = C(t) \implies u'(t) = \underbrace{C(t)\cdot e^{-\mathcal{B}(t)}}_{h(t)}$$

$$g(x) = 1$$

$$u'(t) = C(t)\cdot e^{-\mathcal{B}(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{u(t) \in \int \underbrace{C(t)\, e^{-\mathcal{B}(t)}\, dt}}$$

$$\underline{x(t)} = \underbrace{u(t)\cdot e^{\mathcal{B}(t)}} = u(t)\cdot e^{\int B(t)dt}$$

$$= \left[\underbrace{\int C(t)\cdot e^{-\int B(t)}\, dt + K}_{\mathcal{B}(t) = t}\right]\cdot e^{\int B(t)dt}$$

$x' = x - t \qquad B(t) = 1$

$C(t) = -t$

$x(t)$ soluzione di $x'(t) = B(t)\cdot x(t) + C(t)$

ha la seguente espressione

$$\left[\int C(t)\cdot e^{-\int B(t)\,dt}\,dt + K\right]\cdot e^{\int B(t)\,dt}$$

$x' = x - t$

$B(t) = 1$ $\quad B(t) = t$ $\quad C(t) = -t$

$$\left[\int (-t)\cdot e^{-t}\,dt + K\right] e^{t} = x(t) = K\cdot e^{t} \cancel{+} \int e^{-t}\,t\,dt$$

$$\int t\, e^{-t}\,dt = t\cdot(-e^{-t}) - \int 1\cdot(-e^{-t})\,dt$$

$$= -te^{-t} + \int e^{-t}\,dt = -te^{-t} \cancel{+} e^{-t} + \tilde{K}$$

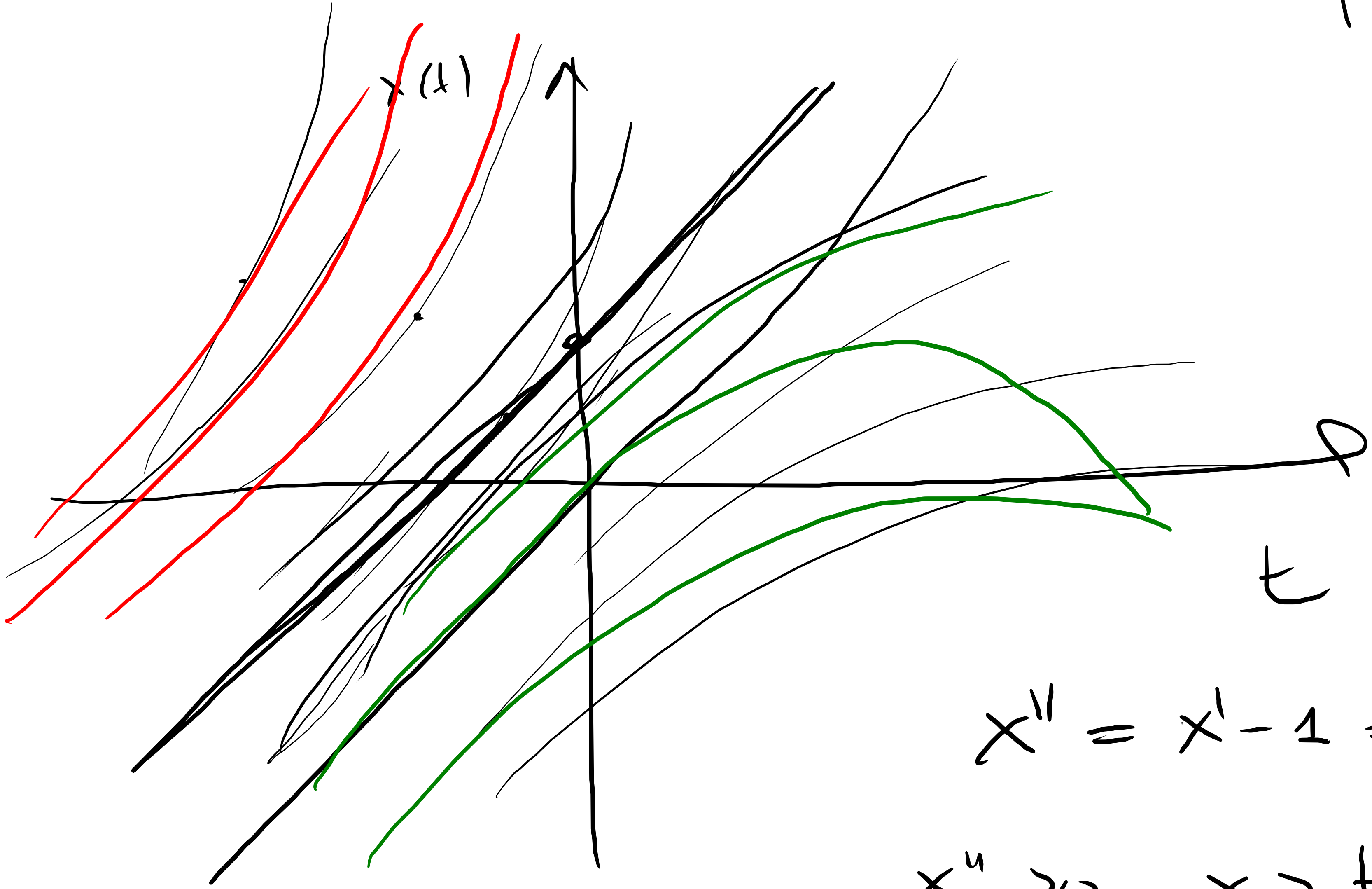
$$x(t) = \left(-te^{-t} - e^{-t} + \tilde{k}\right) \cdot e^{t} =$$

$$= \left(\underline{-t-1} + \underline{\tilde{k}e^{t}}\right)$$

Data $\underline{x' = x - t}$ $= \phi(x,t)$, ogni possibile problema di Cauchy (scelto t_0 e x_0) ha una ed una sola soluzione

$$x' = x - t > 0 \quad \text{se } x(t) > t$$

$$< 0 \quad \text{se } x(t) < t$$



$$\boxed{x(t) = t+1}$$

$$x'(t) = 1$$

$$x' = 1 = \cancel{t} + 1 - \cancel{t} \quad \forall\, t$$

$$\boxed{x(t) = t+1}$$

è una traiettoria di soluzione

$$x'' = x' - 1 = x - t - 1$$

$x'' > 0 \qquad x > t+1$

$x'' < 0 \qquad x < t+$

$\boxed{1}$ $\qquad$ $\boxed{x'(t) = a \cdot x(t)}$ $\qquad$ a variabile separabili

$\boxed{2}$ $\qquad$ $\boxed{x'(t) = \sqrt{x(t)}}$

$\boxed{1}$ e $\boxed{2}$ sono a variabili separabili, ma $\boxed{2}$ NON soddisfa le ipotesi del Teorema di Cauchy nel punto $x(t_0) = 0 = x_0$

Invece la $\boxed{1}$ è un esempio $\forall a \in \mathbb{R}$ di eq. differenziale lineare e a variabili separabili

Iniziamo da $x' = \sqrt{x} = \phi(x,t)$ (autonomo)

Se $x \neq 0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int dt$$

$$\| $$

$$\int x^{-1/2} dx = \int dt = t + \tilde{C}$$

$$\| \quad \left\{ \frac{1}{1-1/2} \cdot x^{1-1/2} + C \right\}$$

$$2x^{1/2} + C = t + \tilde{C}$$

$$2\sqrt{x} = t + \tilde{C}$$

ossia $\sqrt{x} = \frac{t}{2} + \tilde{C}$ $\boxed{x = \frac{t^2}{4} + C}$

$x' = a \cdot x$

$$\int \frac{dx}{x} = \int a\, dt$$

$\ln x = at + C$

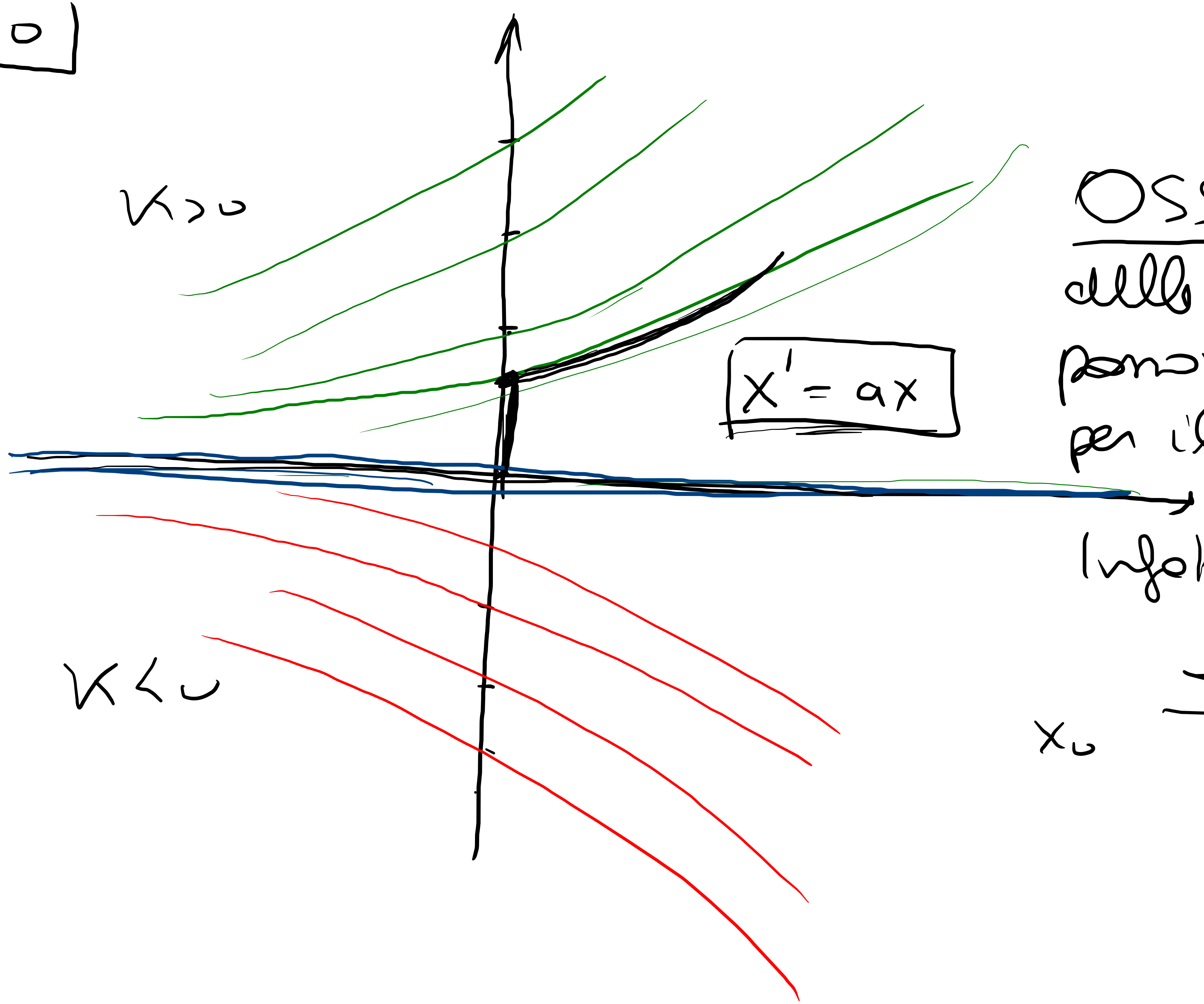
$$\boxed{x(t) = K \cdot e^{at}}$$

$$\boxed{x(0) = K}$$

Se $K \neq 0$ x non è costante ma è monotona crescente se $a > 0$ $K > 0$
oppure se $a < 0$ $K < 0$
decrescente se $a < 0$ $K > 0$
$a > 0$ $K < 0$

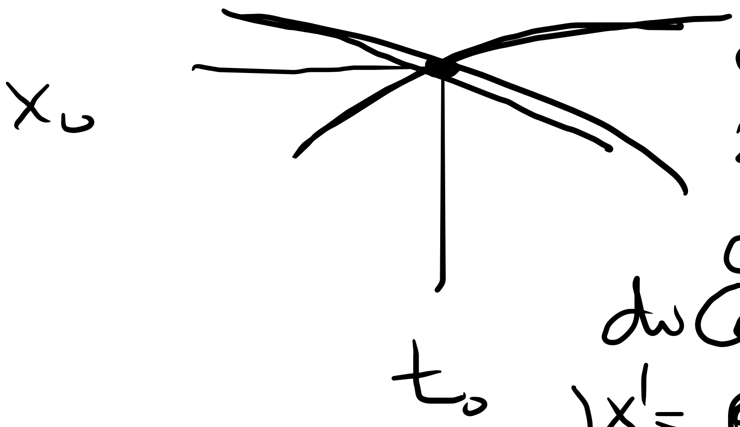
$$\boxed{Ka \cdot e^{at} = a \cdot K \cdot e^{at}}$$

$a > 0$



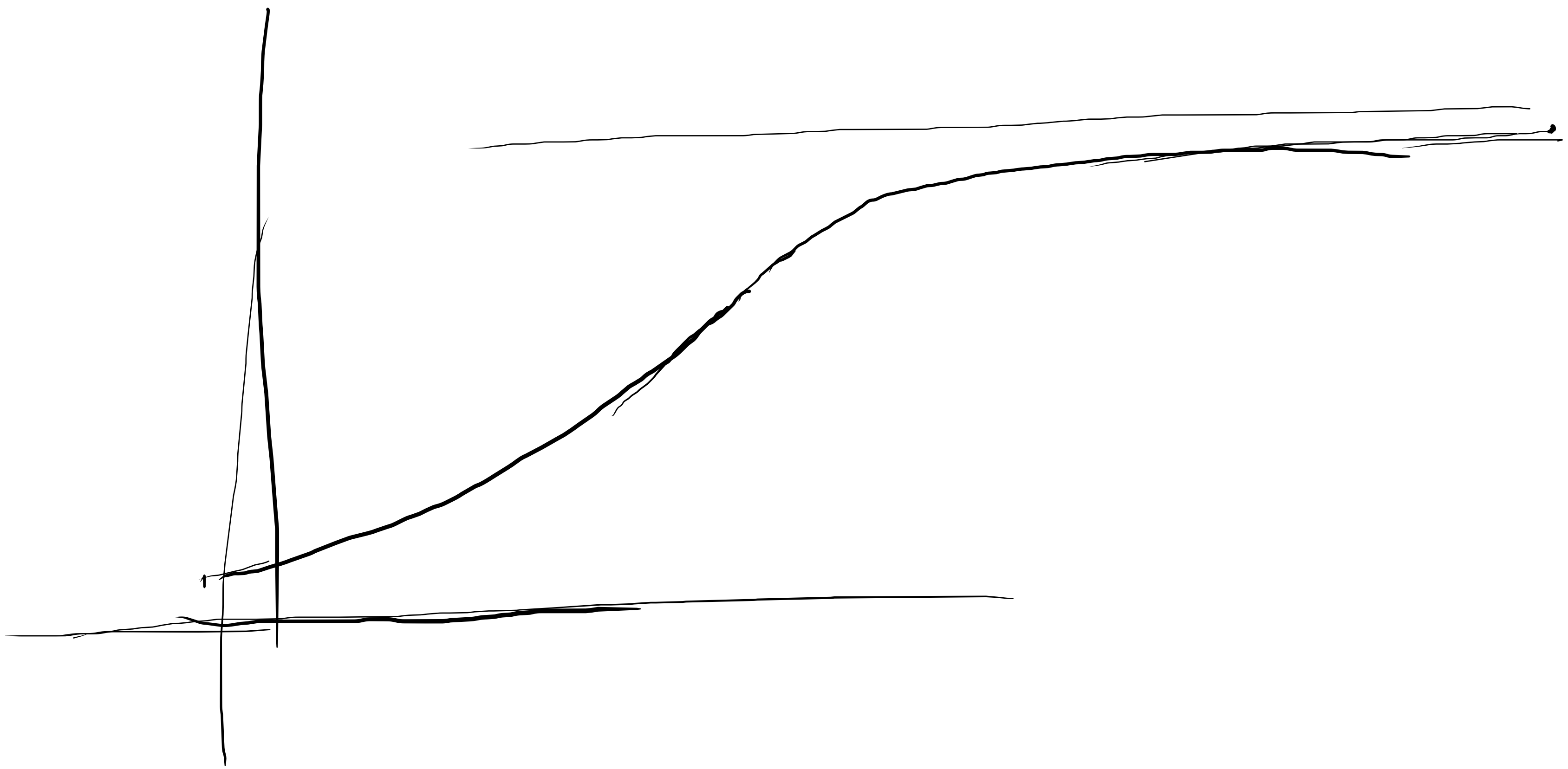
OSS Le traiettorie delle soluzioni NON possono intersecarsi per il Teorema di Cauchy

Infatti se per assurdo

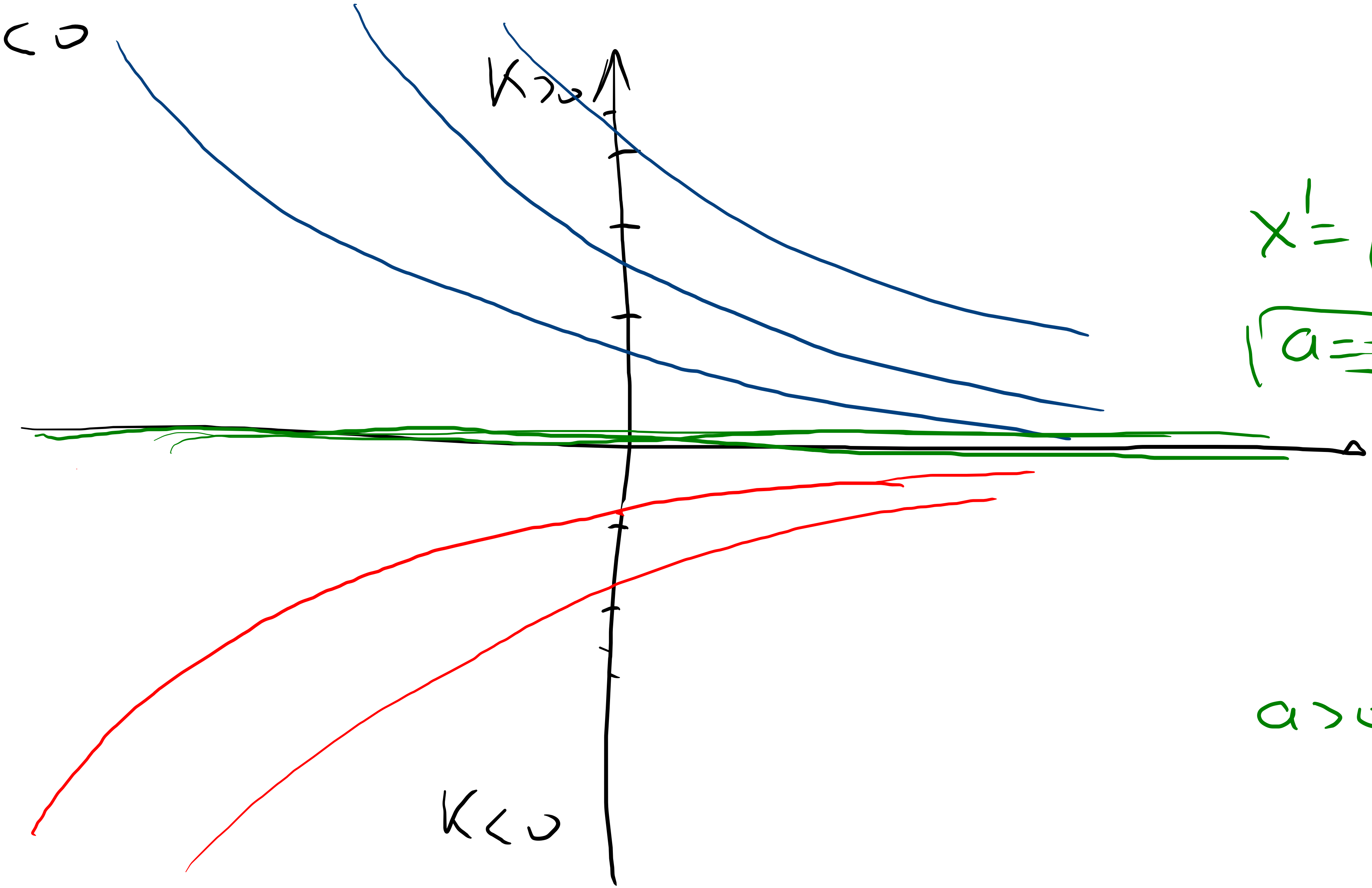


allora ci sarebbero 2 soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$



$a < 0$



$x' = a\,x$

$\boxed{a = 0}$

soluzione costante

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= 0 \\ x_0 &= x \end{aligned}}$$

$a > 0$

Def Supponiamo di considerare una equazione differenziale (del primo ordine) autonoma in forma normale

$$x' = \Phi(x)$$

soluzione (costante)

Diremo che x_e <u>è di equilibrio</u> per tale equazione se $\Phi(x_e) = 0$.

Infatti se consideriamo $x(t) \equiv x_e \quad \forall t$ $\quad x'(t) = 0$

$\Phi(x(t)) = \Phi(x_e) = 0$