LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI del PRIMO e del SECONDO ORDINE

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

ESEMPIO

Della funzione $y = f(x)$ si sa che $\boldsymbol{y' - 2x = 1}$.
Che cosa si può dire della **funzione incognita** $y = f(x)$?

Riscriviamo l'equazione: $y' = 2x + 1$.

Integriamo entrambi i membri :

$$\int y'\,dx = \int (2x+1)\,dx \,.$$

E, risolvendo gli integrali, troviamo :

$$y = \int (2x+1)\,dx = x^2 + x + c \,,$$

dove c è una costante reale.

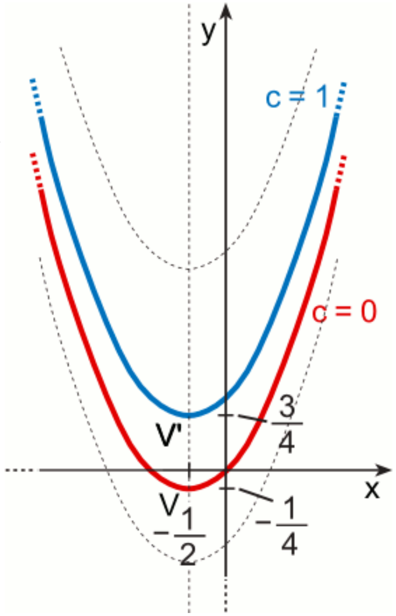
Per ogni valore reale di c,
la funzione $y = x^2 + x + c$
soddisfa l'equazione: $y' - 2x = 1$.

$y = x^2 + x + c$ è un fascio di parabole, con l'asse sulla retta

$$x = -\frac{1}{2}$$

e il vertice nel punto

$$V\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{4}+c\right).$$



ZANICHELLI

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Equazione differenziale

E' un'equazione che ha per incognita una funzione $\boldsymbol{y = f(x)}$
e che stabilisce una relazione tra
- la **variabile indipendente *x***,
- la funzione incognita $f(x)$,
- e almeno una delle sue **derivate**.

Equazione differenziale del primo ordine

E' un'equazione differenziale che stabilisce una relazione tra
- la variabile indipendente x,
- la funzione incognita $y = f(x)$,
- e la **derivata prima *y'***.

ESEMPIO

$$y''' - 2y' = 3xy$$

$y = f(x)$: incognita,
x : var. indipendente,
y''' e y' : derivate di f(x).

Nella forma più generale:

$$F(x; y; y') = 0\ .$$

L'equazione è in **forma normale** quando si può scrivere: $\boldsymbol{y' = G(x; y)}$.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI: Integrale generale e Integrale particolare

Dal nostro esempio iniziale.

Equazione : $y' - 2x = 1$.

Integrale generale :

$y = x^2 + x + c\,,\ c \in \mathbb{R}$.

Soluzione particolare ($c = 0$) :

$y = x^2 + x$.

L'**integrale generale** è l'insieme di tutte le funzioni $y = f(x)$ che risolvono l'equazione.

Nel nostro esempio, l'integrale generale contiene infinite funzioni, che differiscono per il valore di *c.*

Una **soluzione particolare** è una determinata funzione che risolve l'equazione.

Soluzioni di un'equazione differenziale del primo ordine

In generale l'integrale generale di un'equazione del primo ordine

$$F(x; y; y') = 0$$

è dato dalla famiglia di funzioni

$$y = f(x; c).$$

Le soluzioni particolari si ottengono assegnando valori determinati al parametro *c*.

ZANICHELLI

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE: PROBLEMA DI CAUCHY

Il problema di Cauchy

Spesso in un'equazione differenziale del primo ordine si cerca la soluzione particolare di il cui grafico contiene un determinato punto $(x_0; y_0)$.

ESEMPIO In una coltura batterica, la velocità di crescita del numero N di batteri è uguale a kN. Dato il numero N_0 dei batteri inseriti all'istante $t = 0$, quanto vale N dopo un tempo t ?

Impostiamo il calcolo:

$$\begin{cases} N' - kN = 0 \\ N_0 = N(0) \end{cases}$$

Un problema del genere è detto **problema di Cauchy:**

$$\begin{cases} F(x; y; y') = 0 \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}.$$

ESEMPIO

Determiniamo la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - 2x = 1 \\ 5 = f(2) \end{cases}.$$

L'integrale generale è $y = x^2 + x + c$, in cui la costante c deve essere determinata in modo da soddisfare la condizione iniziale $5 = f(2)$:

$$5 = 2^2 + 2 + c .$$

Dunque, si ha $c = -1$ e $y = x^2 + x - 1$.

ZANICHELLI

1. LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL TIPO $y' = f(x)$

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione differenziale

$$y' - 2\cos x = 0 .$$

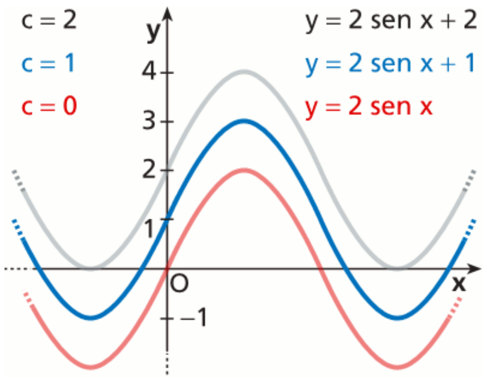
Isoliamo y': $\quad y' = 2\cos x$.

Integriamo entrambi i membri rispetto alla variabile *x:*

$$\int y'\,dx = \int 2\cos x\,dx ,$$

cioè

$$y = \int 2\cos x\,dx = 2\,\mathrm{sen}\,x + c \quad \text{con} \quad x \in \mathbb{R} .$$



METODO

Per risolvere un'equazione differenziale del primo ordine, riconducibile al tipo

$$y' = f(x) ,$$

- si isola y';
- si integrano entrambi i membri:

$$\int y'\,dx = \int f(x)\,dx$$

(osservando che $\int y'\,dx = y + k$);

- si calcola l'integrale indefinito di $f(x)$; **le primitive di $f(x)$ sono le soluzioni.**

ZANICHELLI

2. EQUAZIONI DIFFERENZIALI del 1° ORDINE A VARIABILI SEPARABILI

DEFINIZIONE

Un'equazione differenziale del primo ordine è detta **a variabili separabili** quando può essere scritta nella forma $y' = g(x) \cdot h(y)$, con $g(x)$ e $h(y)$ funzioni continue.

$$y' = \boxed{g(x)} \cdot \boxed{h(y)}$$

funzione di x

funzione di y

Metodo risolutivo

- Essendo $y' = \frac{dy}{dx}$, si ottiene $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$.
- Si separano le variabili, supponendo $h(y) \neq 0$: $\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx$.
- Si integrano entrambi i membri, $\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx$, e si ricava y in funzione di x dall'uguaglianza fra le primitive trovate.
- Si esaminano a parte i casi derivanti da $h(y) = 0$.

3. EQUAZIONI DIFFERENZIALI del 1° ORDINE LINEARI

DEFINIZIONE

Un' equazione differenziale del primo ordine si dice **lineare** quando la funzione incognita *y* e la sua derivata prima *y'* compaiono solamente in termini di primo grado.

$$\boxed{y'} + a(x) \cdot \boxed{y} = b(x)$$

derivata prima

funzione y = f(x)

I grado

- **Equazione lineare omogenea**: equazione lineare in cui $b(x) = 0$; essa è quindi a variabili separabili. La soluzione è $y = ke^{-\int a(x)dx}$, dove k è una costante reale.

- **Equazione lineare completa**: in questo caso $b(x) \neq 0$. Con il *metodo di Lagrange* o *della variazione delle costanti* si dimostra che la soluzione dell'equazione data è:

$$y = e^{-\int a(x)dx}\left[\int b(x)\, e^{\int a(x)dx}\, dx + c\right].$$

ESERCIZI: EQUAZIONI DIFFERENZIALI

ESERCIZIO GUIDA

Verifichiamo che la funzione $y = 2x^3 - x^2 + 3$ è una soluzione dell'equazione differenziale:

$$y' - y + 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = 0.$$

Poiché nell'equazione compare y', calcoliamo la derivata prima della funzione data:

$$y' = \mathrm{D}(2x^3 - x^2 + 3) = 2 \cdot 3x^{3-1} - 2x^{2-1} + 0 = 6x^2 - 2x.$$

Sostituiamo la derivata e la funzione nell'equazione ed eseguiamo i calcoli:

$$6x^2 - 2x - (2x^3 - x^2 + 3) + 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 6x^2 - 2x - 2x^3 + x^2 - 3 + 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0.$$

Avendo ottenuto un'identità, la funzione data è soluzione dell'equazione differenziale.

ESERCIZI: LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL TIPO $y' = f(x)$

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo l'equazione differenziale $2y' - \operatorname{sen} x - 1 = 0$.

Isoliamo y':

$$2y' = \operatorname{sen} x + 1 \rightarrow y' = \frac{\operatorname{sen} x + 1}{2}.$$

Integriamo entrambi i membri rispetto alla variabile x:

$$\int y'\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x + 1}{2}\,dx$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \int (\operatorname{sen} x + 1)\,dx = \frac{1}{2}(-\cos x + x) + c = \frac{x - \cos x}{2} + c, \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Le soluzioni sono le funzioni $y = \dfrac{x - \cos x}{2} + c$.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI del 2° ordine

- **Equazione differenziale del secondo ordine**: è riconducibile alla forma $F(x; y; y'; y'') = 0$.

- L'**integrale generale** di un'equazione differenziale del secondo ordine è una famiglia di funzioni $y = f(x; c_1; c_2)$ nella variabile x, con c_1 e c_2 parametri reali.

  Una **soluzione particolare** si ottiene attribuendo a c_1 e c_2 determinati valori. Per trovare un integrale particolare occorre dare due condizioni.

- **Equazione differenziale lineare a coefficienti costanti**: è un'equazione differenziale del secondo ordine riducibile alla forma $y'' + by' + cy = r(x)$, dove b e c sono numeri reali e $r(x)$ una funzione continua in un opportuno intervallo.
  Un'equazione differenziale di questo tipo si dice: **omogenea** se $r(x) = 0$ in tutti i punti dell'intervallo in cui è definita; **completa** se $r(x) \neq 0$ in qualche punto dell'intervallo.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI del 2° ordine

Risoluzione delle equazioni differenziali del secondo ordine lineari a coefficienti costanti

- **Equazioni omogenee:** $y'' + by' + cy = 0$.
  I) Si trovano le radici (reali o complesse) dell'equazione caratteristica $z^2 + bz + c = 0$.
  II) Si determina l'integrale generale dell'equazione differenziale secondo lo schema seguente.

Radici dell'equazione caratteristica		Integrale generale
$\Delta > 0 \rightarrow z_1 \neq z_2$	(reali distinte)	$y = c_1 e^{z_1 x} + c_2 e^{z_2 x}$
$\Delta = 0 \rightarrow z_1 = z_2$	(reali coincidenti)	$y = (c_1 + c_2 x) e^{z_1 x}$
$\Delta < 0 \rightarrow z_{1,2} = \alpha + i\beta$	(complesse coniugate)	$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x)$

- **Equazioni complete:** $y'' + by' + cy = r(x)$.
  Si dimostra che l'integrale generale di un'equazione differenziale di questo tipo è:
  $y = y_1 + y_0$, dove $y_1 = f(x; c_1; c_2)$ è l'integrale *generale* dell'*omogenea* associata,
  $y_0 = g(x)$ è un integrale *particolare* dell'*equazione data.*

  Se $c = 0$ e $b = 0$ $\rightarrow$ si determina direttamente la *soluzione generale* mediante due integrazioni successive.