1

Data $h(x) \in L^1(\mathbb{R})$ con $\int dx\, h(x) \neq 0$, si consideri la successione

$$u_n(x) = \frac{nh(nx)}{\int dx\, h(x)} \ . \tag{1}$$

Si mostri che $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \delta(x)$ nel senso delle distribuzioni, dove $\delta(x)$ denota la delta di Dirac (o equivalentemente usando la notazione dei funzionali, che $\lim_{n\to\infty} T_{u_n} = \delta_0$).

2

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione $f_\epsilon \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ definita da

$$f_\epsilon(x) = \theta(x) e^{-\epsilon x} \ , \tag{2}$$

dove $\epsilon > 0$ e $\theta(x)$ è la funzione theta di Heaviside. Si usi questo risultato per mostrare che

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{k \pm i\epsilon} = \mathcal{P}\frac{1}{k} \mp i\pi\delta(k) \ , \tag{3}$$

dove $\mathcal{P}\frac{1}{k}$ denota la distribuzione parte principale di $1/k$, $\delta(k)$ denota la delta di Dirac, e il limite è nel senso delle distribuzioni. [*Suggerimento:* Utilizza che $\mathcal{F}[\theta](k) = i\mathcal{P}\frac{1}{k} + \pi\delta(k)$. Per trovare entrambi i segni, considera anche la trasformata di Fourier di $f_\epsilon(-x)$ e di $\theta(-x)$.]