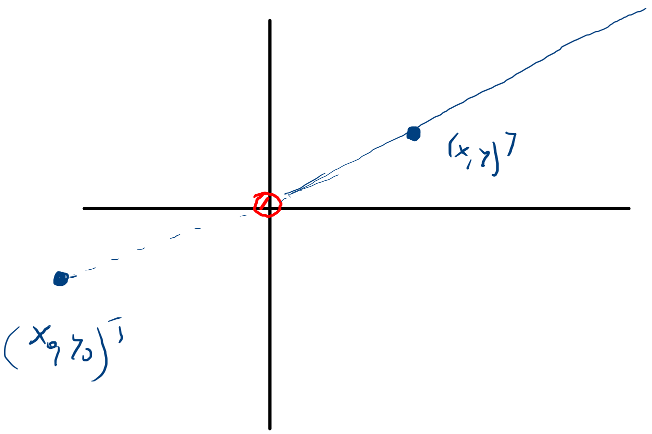
$$g(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)^T \qquad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0$$

g non è conservativo $\quad \oint_\gamma \langle g, \tau \rangle \, ds = 2\pi \qquad \gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)^T$

Lemma di Poincaré: A aperto stellato ....



$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$ non è stellato!

Es $\quad g(x,y) = \left(y e^{y},\ e^{x} - \cos y\right)^T \qquad \boxed{g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$

$\gamma(t) = (t\cos t,\ t\,\mathrm{sen}\,t)^T \quad t \in [0, 2\pi] \qquad \gamma'(t) = (\cos t - t\,\mathrm{sen}\,t,\ \mathrm{sen}\,t + t\cos t)^T$

1° modo $\displaystyle\int_\gamma \langle g, \tau\rangle\, ds = \int_0^{2\pi} \left\langle \left(t\,\mathrm{sen}\,t\, e^{t\cos t},\ e^{t\cos t} - \cos(t\,\mathrm{sen}\,t)\right)^T, \left(\cos t - t\,\mathrm{sen}\,t,\ \mathrm{sen}\,t + t\cos t\right)^T \right\rangle dt$

complicato!

2° modo $\displaystyle\int_\gamma \langle g, \tau\rangle\, ds \qquad \mathrm{rot}\, g = \left(0, 0, e^x - e^x\right)^T = (0,0,0)^T$

g irrotazionale $\Rightarrow$ <u>g è conservativo</u>

$\displaystyle\Rightarrow \int_\gamma \langle g, \tau\rangle\, ds = \int_\varphi \langle g, \tau\rangle\, ds \qquad \varphi(t) = (t, 0)^T \quad t \in [0, 2\pi] \quad \varphi'(t) = (1, 0)^T$

$\displaystyle = \int_0^{2\pi} \left\langle \left(0,\ e^t - 1\right)^T, (1, 0)^T \right\rangle dt = 0$

3° modo $\quad g$ è conservativo $\quad \int_\gamma \langle g, T \rangle \, ds = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$

Troviamo U

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= y e^x \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= e^x - \cos y \end{aligned}} \rightsquigarrow U(x,y) = y\, e^x + h(y)$$

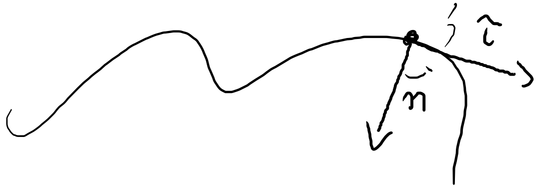
$$\frac{\partial U}{\partial y} = e^x + h'(y) = e^x - \cos y$$

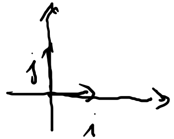
$$\Rightarrow h(y) = -\sin y$$

$$\Rightarrow U(x,y) = y e^x - \sin y$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \langle g, T \rangle \, ds = U(2\pi, 0) - U(0,0) = 0 - 0 = 0 //$$

$$\gamma(0) = (0,0)^T \quad \gamma(2\pi) = (2\pi, 0)^T$$





$\gamma(t)$ curva piana

$n, \hat{\tau}$ componenti e $\begin{array}{cc} i & j \\ x & y \end{array}$

Posso "orientare" la curva.

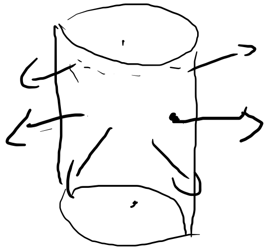
In ogni punto della curva posso dire qual è il verso del vettore normale

Cambiare la parametrizzazione può cambiare l'orientazione della curva, ma in ogni caso ho sempre un versore normale che si muove con continuità su tutta la curva

Cosa succede su una superficie?

$\sigma: K \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$N = \frac{\partial \sigma}{\partial s} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial t}$

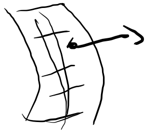
Data una superficie  posso dire ciò che è "dentro" e ciò che è "fuori"

il cilindro è una superficie orientabile.

Ma esistono anche superfici NON orientabili

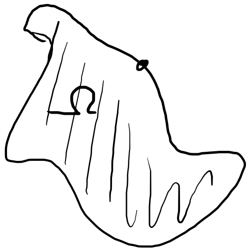
(Nastro di Möbius)

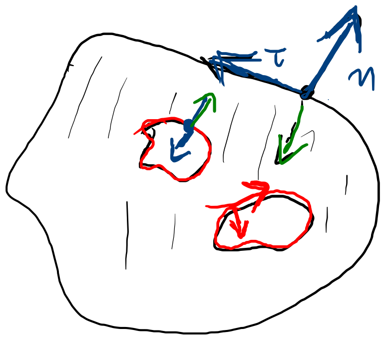
Non potremo calcolare il flusso di un campo attraverso una superficie non orientabile



Orientare il "bordo" di un insieme

Sia $\boxed{\Omega}$ dominio regolare a tratti (aperto connesso con $\partial\Omega$ curva regolare a tratti)

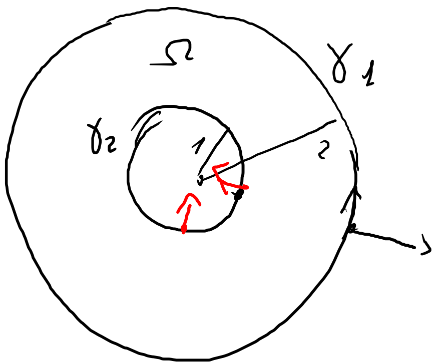




In ogni punto di $\partial\Omega$ esiste una normale entrante e una normale uscente

Diremo che Ω è orientato positivamente (secondo la normale uscente) se la normale di $\underline{\partial\Omega}$ punta verso l'esterno di Ω

Esempio corona circolare

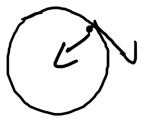


$\cancel{\gamma_2(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)^T}$?

$\gamma_2(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)^T \quad t \in [0, 2\pi)$

$\gamma_2'(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t)^T$

$\nu(t) = (-\operatorname{sen} t, -\cos t)^T$



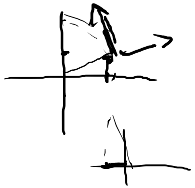
$\gamma_1 + \gamma_2$

Come si parametrizza la corona in modo da avere un'orientazione positiva?

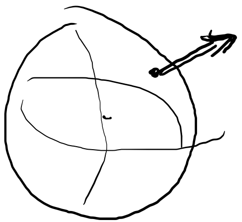
$\gamma_1(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t)^T$

$\gamma_1'(t) = (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t)^T$

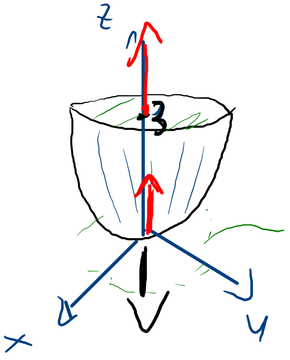
$\nu(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t)^T$



In $\mathbb{R}^3$ Sia Ω una regione (solido) di $\mathbb{R}^3$ con bordo regolare a tratti (superficie) Ω è orientato positivamente se la parametrizzazione σ di $\partial\Omega$ è tale che la normale $N = \frac{\partial \sigma}{\partial s} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial t}$ punta verso l'esterno



Esempio: Consideriamo $\Omega = \{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3$ tali che $x^2+y^2 \leq 3$, $x^2+y^2 \leq z \leq 1 \}$



$B((0,0)^T, \sqrt{3})$

$\partial \Omega$ = Paraboloide + Disco

Scriviamo una parametrizzazione che orienti Ω positivamente

$\sigma_1 : B((0,0)^T, \sqrt{3}) \to \mathbb{R}^3$ $\quad$ $\sigma_1(s,t) = \cancel{(s, t, s^2+t^2)^T}$

$$\begin{array}{ccc} i & j & k \\ 1 & 0 & 2s \\ 0 & 1 & 2t \end{array}$$

$\frac{\partial \sigma_1}{\partial s} = (1, 0, 2s)^T$ $\quad$ $\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} = (0, 1, 2t)^T$ $\quad$ $w(s,t) = (-2s, -2t, 1)^T$

$w(0,0) = (0, 0, 1)^T$ $\uparrow$

$\sigma_1(s,t) = (t, s, s^2+t^2)^T$ $\quad$ $w(s,t) = (2s, 2t, -1)^T$ OK

$\sigma_2(s,t) = (s, t, 3)^T$ $\quad$ $w(s,t) = (0,0,1)^T$

Si calcoli il flusso del campo $g(x,y,z) = (x,y,z)^T$ uscente da Ω:

$$\iint_{\partial\Omega^+} \langle g, \nu \rangle \, d\sigma = \iint_{\sigma_1} \langle g, \nu \rangle \, d\sigma + \iint_{\sigma_2} \langle g, \nu \rangle \, d\sigma$$