Teorema della divergenza $N=2$

$$\int_{\partial\Omega^+ = \gamma} \langle g, \nu \rangle \, ds = \iint_\Omega \operatorname{div} g \, dx\,dy \qquad g(x,y) = \left(X(x,y),\, Y(x,y)\right)^T \qquad \gamma(t) = (x(t), y(t))^T$$

$$\int_a^b \left[X(x(t),y(t)) \cdot y'(t) - Y(x(t),y(t)) \cdot (x'(t)) \right] dt = \boxed{\iint_\Omega \left[\frac{\partial X}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial Y}{\partial y}(x,y) \right] dx\,dy}$$

Definiamo un nuovo campo $h(x,y) = \left(-Y(x,y),\, +X(x,y)\right)^T$, $\quad -Y(x,y) = U(x,y)$, $\quad X(x,y) = W(x,y)$

$$W = X \qquad U = -Y \qquad \operatorname{div} h = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y}$$

$$\underbrace{\int_a^b \left[W(x(t),y(t))\, y'(t) + U(x(t),y(t)) \cdot x'(t) \right] dt}$$

$$\| $$

$$\int_a^b (U \cdot x' + W y')\, dt = \int_\gamma \langle h, \tau \rangle \, ds = \iint \overbrace{\left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right)}^{\langle \operatorname{rot} h, (0,0,1)^T \rangle} dx\,dy = \iint_\Omega \langle \operatorname{rot} h, \bar{e}_3 \rangle \, dx\,dy$$

$$\bar{e}_3 = (0,0,1)^T$$

Formula di Gauss-Green (Teorema del rotore in $\mathbb{R}^2$)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dominio regolare a tratti con bordo orientato positivamente (secondo la normale uscente); $\bar{\Omega} \subset A$ A aperto, $g : A \to \mathbb{R}^2$, $g \in C^1(A, \mathbb{R}^2)$. $g(x,y) = (X, Y)^T$

Allora

$$\oint_{\partial\Omega^+} \langle g, \tau \rangle \, ds = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx\,dy = \iint_\Omega \langle \mathrm{rot}\, g, \overset{(0,0,1)^T}{e_3} \rangle \, dx\,dy\,dz$$

Dim si consideri $\boxed{h(x,y) = \left(\overset{U}{Y(x,y)}, \overset{W}{-X(x,y)} \right)^T}$, allora

$$\int_{\partial\Omega^+} \langle g, \tau \rangle \, ds = \int_a^b \Big[\underbrace{X(x(t), y(t)) \cdot x'(t)}_{-W \cdot x'} + \underbrace{Y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)}_{U\, y'} \Big] dt = \int_a^b \langle (U, W)^T, \overset{\nu(t)}{(y', -x')^T} \rangle \, dt$$

$\partial\Omega^+ : [a,b] \to \mathbb{R}^2$

$\partial\Omega^+(t) = (x(t), y(t))^T$

$$= \int_{\partial\Omega^+} \langle h, \nu \rangle \, dt \overset{\text{Gauss}}{=} \iint_\Omega \mathrm{div}\, h \, dx\,dy = *$$

$$* = \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x} Y + \frac{\partial}{\partial y}(-X) \right] dx\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Es: $g(x,y) = (\sin x + y,\ e^{y^2} - 3x)^T$

$\gamma(t) = (2\cos t,\ 2\sin t)^T \quad t \in [0, 2\pi]$ $\qquad \gamma'(t) = (-2\sin t,\ 2\cos t)^T$

Si calcoli $\oint_\gamma \langle g, T\rangle\, ds$

?

con la definizione $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left[(\sin(2\cos t) + 2\sin t)\cdot(-2\sin t) + \left(e^{4\sin^2 t} - 2\cos t\right) 2\cos t \right] dt$

$\operatorname{rot} g = (0, 0, -4)^T$

con la formula

$$\oint_\gamma \langle g, T\rangle\, ds = \iint_{\substack{\text{interno di } \gamma \\ B((0,0)^T, 2)^T}} \langle \operatorname{rot} g, e_3\rangle\, dx\,dy = \iint_B -4\, dx\,dy = -4\cdot\pi\cdot 4 = -16\pi$$

OSS: Lemma di Poincaré $\qquad N=2$

A stellato $\quad g$ irrotazionale $\Rightarrow g$ conservativo $\qquad \boxed{g : A \to \mathbb{R}^2}$

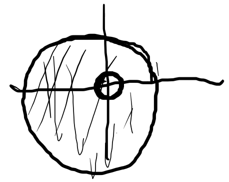
$$\oint_{\gamma = \partial\Omega^+} \langle g, \tau \rangle \, ds = \boxed{\iint_{\Omega} \langle \operatorname{rot} g, e_3 \rangle \, dx\,dy} = 0 \quad \text{se } \operatorname{rot} g = 0$$

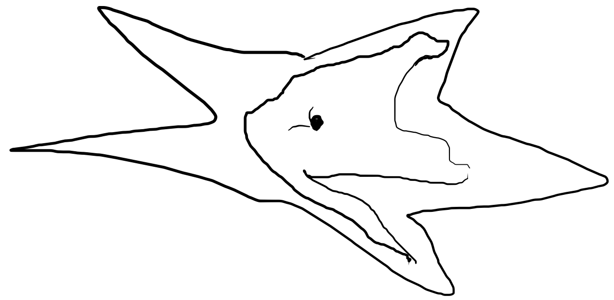
?

[Se g è irrotazionale allora g è a circuitazione nulla, quindi conservativo]

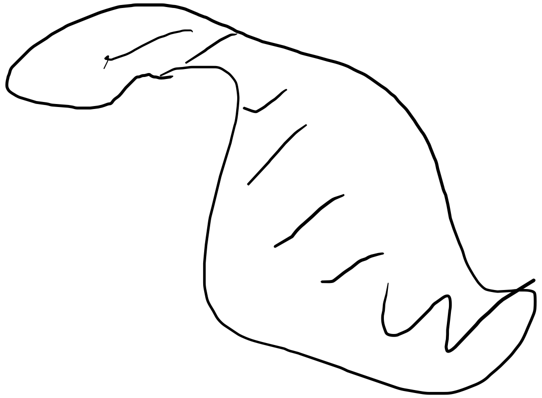
falso in generale

L'affermazione è vera se è vero che per ogni curva chiusa γ, γ è il bordo di un dominio $\Omega \subseteq A$





Definizione: un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice semplicemente connesso se per ogni curva regolare a tratti γ con sostegno $\Gamma \subseteq E$ si ha che γ è il bordo di una regione limitata Ω tutta contenuta in E.



"E non ha buchi"

Teorema (Lemma di Poincaré)

Sia A un aperto semplicemente connesso, $g: A \to \mathbb{R}^2$ C^1

g irrotazionale $\Rightarrow$ g è conservativo.

Dim per ogni γ chiusa $\oint_\gamma \langle g, \tau \rangle ds = \int_{\partial\Omega} \langle g, \tau \rangle ds = \underbrace{\iint_\Omega \langle \mathrm{rot}\, g, e_3 \rangle ds}_{=0}$

$\Rightarrow g$ è conservativo.

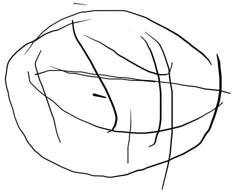
Per la divergenza: se A è semplicemente connesso

$$\int_{\partial\Omega^+} \langle g, \nu \rangle \, ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div} g \, dx\,dy$$

Se $\operatorname{div} g = 0$ si ha $\displaystyle\int_{\gamma} \langle g, \nu \rangle \, ds = 0 \quad \forall\, \gamma$ chiusa

$\mathbb{R}^3$

$$\iint_{\partial\Omega^+} \langle g, w \rangle \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} g \, dx\,dy\,dz$$



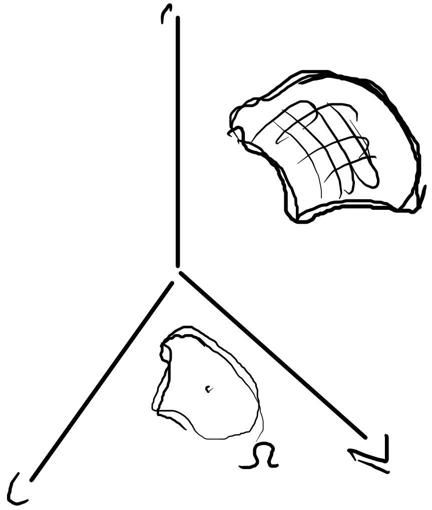
A sia tale che per ogni superficie chiusa regolare a tratti, questa è il bordo di una regione $\Omega \subseteq A$.

Teorema di Kelvin-Stokes del rotore in $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^2$

$$\oint_{\partial\Omega^+} \langle g, \tau \rangle \, ds = \boxed{\iint_\Omega \langle \mathrm{rot}\, g, e_3 \rangle \, dx\,dy} = *$$

$\hat{k} = (0,0,1)^T = \nu$ vettore normale della superficie piana Ω



$\Omega \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$

$\tilde{\Omega} = \{ (s,t,0)^T \in \mathbb{R}^3 : (s,t)^T \in \Omega \}$

$\nu = (0,0,1)^T$

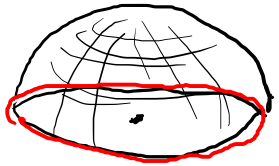
$\sigma(s,t) = (s,t,0)^T$

$\frac{\partial \sigma}{\partial s} = (1,0,0)$

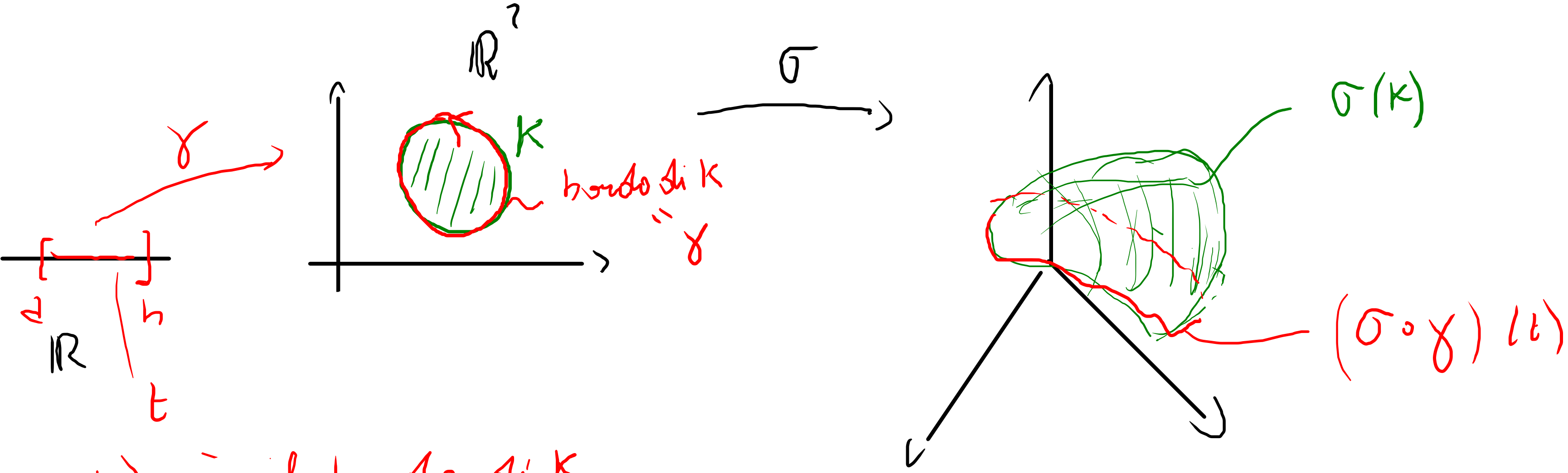
$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = (0,1,0)$

$$* = \iint_{\sigma = \tilde{\Omega}} \langle \mathrm{rot}\, g, \nu \rangle \, d\sigma$$

flusso attraverso $\tilde{\Omega}$ del rotore di g



Possiamo avere una superficie $\sigma : K \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ che ha un "bordo":



$\gamma(t)$ è il bordo di K

$(\sigma \circ \gamma)(t)$ è il bordo di σ

Sia $K \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare a tratti con frontiera ∂K^+ orientata positivamente.
∂K^+ è il sostegno di una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$

Sia $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare a tratti; diremo bordo di σ la curva $\partial \sigma^+ = \sigma \circ \gamma$ (orientata positivamente).

Teorema di Kelvin-Stokes

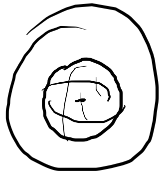
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto, $g : A \to \mathbb{R}^3$ C^1. Sia $\sigma : K \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ superficie regolare a tratti con bordo $\partial \sigma^+$ orientato positivamente. Allora

$$\boxed{\oint_{\partial \sigma^+} \langle g, \tau \rangle \, ds = \iint_{\sigma} \langle \mathrm{rot}, \nu \rangle \, d\sigma}$$

circuitazione del campo nel **bordo** della superficie

flusso del rotore di g attraverso la superficie

$$\text{div}\, g = \lim_{R \to 0} \frac{\iint_{S_R} \langle g, \nu \rangle \, d\sigma}{\text{Vol}\, B_R}$$



$N = 1$ $\quad f'(x)$

$$f(x) = \lim_{R \to 0} \frac{1}{2R} \int_{B(x,R)} f'(t)\, dt = \lim_{R \to 0} \frac{f(x+R) - f(x-R)}{2R}$$

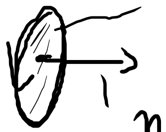
$[x-R, x+R]$

$x-R \quad x \quad x+R$

$$\frac{1}{2R} \int_{x-R}^{x+R} f'(t)\, dt = \frac{1}{2R}\big(f(x+R) - f(x-R)\big)$$

$\langle \text{rot}\, g, \bar{v} \rangle$

$\bar{v} \in \mathbb{R}^3 \qquad \bar{v} = e_1 \ e_2 \ e_3$



D disco in $\mathbb{R}^3$

n versore normale

$D_{R,n}$ disco di centro $\underline{(x_0, y_0, z_0)^T}$ con versore normale n di raggio R

$$\frac{1}{\text{Area}} \iint_{D_{R,n}} \langle \text{rot}, n \rangle \, d\sigma = \frac{1}{\text{Area}} \oint_{C_{R,n}} \langle g, T \rangle \, ds$$

$C_{R,n} = \partial D_{R,n}$ circonferenza di centro (x_0, y_0, z_0), raggio R e normale n

$$\underbrace{\lim_{R \to 0} \overbrace{\frac{1}{\text{Area}(D_{R,n})}}^{\frac{1}{\pi R^2}} \iint_{D_{R,n}} \langle \text{rot}, n \rangle \, d\sigma}_{\langle \text{rot}\, g(x_0, y_0, z_0), n \rangle} = \underbrace{\lim_{R \to 0} \frac{1}{\text{Area}(D_{R,n})} \oint_{C_{R,n}} \langle g, T \rangle \, ds}$$

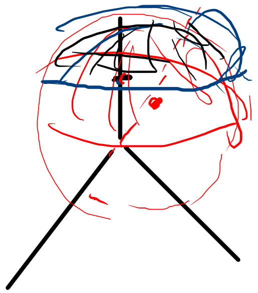
"vorticità" del campo:

$\text{rot}\, g = 0$ significa assenza di vorticità

Esercizio $g(x,y,z) = \left(y^3 \cos z ,\ x^3 e^z ,\ -y z^2 \operatorname{sen} x \right)^T$

Sia $h(x,y,z) = \operatorname{rot} g(x,y,z)$

Sia S la superficie semisferica $(x-1)^2+y^2+z^2 = 5$ $z \geq 1$

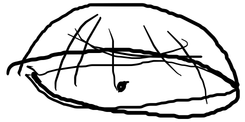


Si calcoli il flusso del campo h attraverso S.

1° modo: calcolare $\operatorname{rot} g = h$, parametrizzare S e calcolare il flusso con la definizione

2° modo: $$\iint_\sigma \langle h, \nu \rangle \, d\sigma = \iint_\sigma \langle \operatorname{rot} g, \nu \rangle \, d\sigma = \oint_{\partial\sigma^+} \langle g, \tau \rangle \, ds$$

$=$



S $\quad \sigma(\varphi,\vartheta) = \left(1+\sqrt{5}\operatorname{sen}\varphi\cos\vartheta ,\ \sqrt{5}\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\vartheta ,\ \sqrt{5}\cos\varphi \right)^T$

$z \geq 1 \Rightarrow \sqrt{5}\cos\varphi \geq 1 \Rightarrow \cos\varphi \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \varphi \in \left[0, \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right]$ $\quad \vartheta \in [0, 2\pi]$

∂S è la circonferenza $z = 1$ $\quad (x-1)^2 + y^2 + 1 = 5$ $\quad (x-1)^2 + y^2 = 4$

curva: $(x-1)^2+y^2=4 \quad z=1$

$\gamma(t) = (1+2\cos t,\ 2\sin t,\ 1)^T \quad t\in[0,2\pi]$

$\gamma'(t) = (-\ \ -)$

parametrizzazione del ∂S

$(x-1)^2+y^2=4$

$g = (y^3\cos z,\ x^3 e^z,\ -yz^2\sin x)^T$

$$\boxed{\oint_\gamma \langle g,\tau\rangle\, ds} = \int_0^{2\pi}\Big[(8\sin^3 t\cos(1))\cdot(-2\sin t) + (1+2\cos t)^3 e^1\cdot(2\cos t)\Big] + \cancel{\big[(-2\sin t)\,1\,\sin(1+2\cos t)\big]\cdot 0}\ dt$$

$$\iint_{\text{Disco che ha come bordo }\gamma} \langle \mathrm{rot}\, g, w\rangle\, d\sigma = \iint_{\text{Disco}} \left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\cdot 1\, d\sigma$$

$w = (0,0,1)^T$

$$\iint_S \langle \mathrm{rot}\, g, w\rangle\, d\sigma$$

S tale che $\partial S^+ = \gamma$

$$g = (y^3 \cos z,\ \underline{x^3 e^z},\ -y z^2 \sin x)^T$$

$$\operatorname{rot} g = \left(?,\ ?,\ 3x^2 e^z - 3y^2 \cos z \right)^T$$

$$\iint_{D \times \{\omega\}} \left(3x^2 e^z - 3y^2 \cos(z)\right) d\sigma = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \left[3(1+\rho\cos\vartheta)^2 \cdot e - 3\rho^2 \sin^2\vartheta \cdot \cos(1) \right] \cdot \rho \, d\rho \right) d\vartheta = *$$

$$\parallel$$

$$(x-1)^2 + y^2 \le 4$$

$$z = 1 \qquad\qquad x = 1 + \rho\cos\vartheta$$

$$* = 3 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \left(\cancel{\rho} + 2\rho^2 \cos\vartheta \cdot e + \rho^3 \cos^2\vartheta \cdot e - \rho^3 \sin^2\vartheta \cdot \cos(1) \right) d\rho \right) d\vartheta = \circledast$$

$$\left[\frac{1}{2}\rho^2 e + \cancel{\frac{2}{3}\rho^3 e \cos\vartheta} + \frac{1}{4}\rho^4 \cos^2\vartheta \, e - \frac{1}{4}\rho^4 \sin^2\vartheta \cdot \cos(1) \right]_0^2 = \cancel{\frac{1}{2}}\, 2e + 4e\cos^2\vartheta - 4\cos(1)\sin^2\vartheta$$

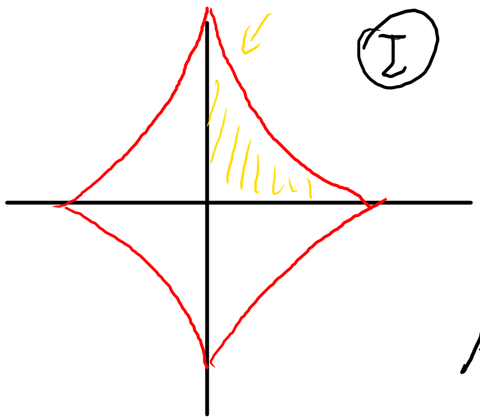
$$\cancel{[0, 2\pi]}$$

$$\circledast = 3 \int_0^{2\pi} \left(2e + 4e\cos^2\vartheta - 4\cos(1)\sin^2\vartheta \right) d\vartheta = 3 \left[\underbrace{4\pi e + 4e\pi}_{8\pi e} - 4\cos(1)\pi \right]$$

$$= 12\pi \left(2e - \cos(1) \right)$$

Applicazione al calcolo dell'area di una regione piana racchiusa da una curva.

<u>Esempio</u> Area della regione interna alla curva $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ $\quad \gamma(t)=(\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)^T$



$x=\cos^3 t$

$y=\operatorname{sen}^3 t$

$|\operatorname{sen} t|=\sqrt{1-\cos^2 t}$

$y=(1-\cos^2 t)^{3/2}$

$\cos^2 t = x^{\frac{2}{3}}$

$y=\left(1-x^{2/3}\right)^{3/2}$

$$A = 4\int_0^1 \left(1-x^{2/3}\right)^{3/2} dx$$

$$\text{Area} = \boxed{\iint_\Omega 1\, dx\,dy}$$

$$\iint_\Omega \operatorname{div} g \, dx\,dy = \int_{\partial\Omega^+ = \gamma} \langle g,\nu\rangle\, ds$$

g ? $\operatorname{div} g = 1$

cerchiamo $g(x,y)=(X,Y)^T$ tale da

$$\boxed{\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=1}$$

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_{\partial\Omega^+} \langle g,\tau\rangle\, ds$$

Possiamo prendere $\boxed{g(x,y) = \frac{1}{2}(x,y)^T}$ $\qquad (x,0)^T \qquad (0,y)^T$

$\operatorname{div} g = 1$

$\Rightarrow$ Area Ω: $\displaystyle\iint_\Omega 1\,dx\,dy = \iint_\Omega \operatorname{div} g\,dx\,dy = \int_\gamma \left\langle \frac{1}{2}(x,y)^T, \nu \right\rangle ds = *$

$\gamma(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)^T$

$\gamma'(t) = (-3\operatorname{sen} t \cos^2 t, \; 3\cos t \operatorname{sen}^2 t)^T \qquad \nu(t) = (3\cos t \operatorname{sen}^2 t, \; 3 \operatorname{sen} t \cos^2 t)^T$

$$* = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos^3 t \cdot (3\cos t \operatorname{sen}^2 t) + \operatorname{sen}^3 t \cdot (3\operatorname{sen} t \cos^2 t)\right] dt =$$

$2t = u$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t \cdot \operatorname{sen}^2 t \, [\underbrace{\cancel{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}}_{=1}]\,dt = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} [\underbrace{2\operatorname{sen} t \cos t}_{=\operatorname{sen}(2t)}]^2 dt = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(2t)\,dt =$$

$$= \frac{3}{16}\int_0^{4\pi} \operatorname{sen}^2(u)\,du = \frac{3}{8}\pi$$

Alcune formule di "integrazione per parti"

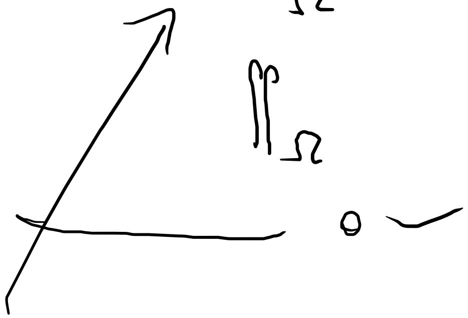
$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = \left[f(x)\cdot g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$$

$$\int_a^b \underbrace{\left[f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x) \right]}_{\frac{d}{dx}(f\cdot g)} dx = \left[f(x)\cdot g(x) \right]_a^b$$

$N = 1$ $\quad \int_{[a,b]} Df \cdot g \, dx = \left[f\cdot g \right]_{\partial [a,b]^+} - \int_{[a,b]} f \cdot Dg \, dx$

$$\iiint_\Omega Df\cdot g = \iint_{\partial\Omega^+} f\, g - \iiint_\Omega f\, Dg$$

$$\iint_\Omega \qquad \int_{\partial\Omega^+} \qquad \int_\Omega$$



Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ campo scalare

$g: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ " vettoriale

$f \cdot g$ è campo vettoriale $\quad f(x,y,z) \cdot g(x,y,z)$ è vettore

$$\boxed{\operatorname{div}(f \cdot g)} = \operatorname{div}\left(\left(f(x,y,z)\cdot g_1(x,y,z),\ f(x,y,z)\cdot g_2(x,y,z),\ f(x,y,z)\cdot g_3(x,y,z)\right)^T\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot g_1 + f \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot g_2 + f \cdot \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot g_3 + f \cdot \frac{\partial g_3}{\partial z} =$$

$$\boxed{= f \cdot \operatorname{div} g + \langle \nabla f, g \rangle}$$

$$\operatorname{div}(f\cdot g) = f \operatorname{div} g + \langle \nabla f, g\rangle$$

$$\iiint_\Omega h \, \Delta f \, dm = -\iiint_\Omega \langle \nabla h, \nabla f\rangle \, dm$$

$$\underbrace{\iiint_\Omega \operatorname{div}(f\cdot g)\, dx\,dy\,dz}_{} = \iiint_\Omega f \operatorname{div} g \, dx\,dy\,dz + \iiint_\Omega \langle \nabla f, g\rangle \, dx\,dy\,dz$$

$$\iiint_A \langle$$

$$\|$$

$$\iint_{\partial\Omega^+} \langle f g, \nu\rangle \, d\sigma = \iint_{\partial\Omega^+} f \cdot \langle g, \nu\rangle \, d\sigma$$

$$h = f \quad g = \nabla f$$

$$\iiint_\Omega \langle \overset{\nabla h}{\nabla f}, \overset{\nabla f}{g}\rangle \, dm = \cancel{\iint_{\partial\Omega^+} f \langle g, \nu\rangle \, d\sigma}^{=0} - \iiint_\Omega \overset{h}{f} \cdot \operatorname{div} \overset{\Delta f}{g} \, dm$$

$$\iint_\Omega \langle \nabla f, g\rangle \, dm = \int_{\partial\Omega^+} f \langle g, \nu\rangle \, ds - \iint_\Omega f \operatorname{div} g \, dm$$

$$f, g \in C^2([a,b]) \qquad N=1$$

$$\int_a^b f'' g \, dx = [f' g]_a^b - \int_a^b f' g' \, dx = [f' g]_a^b - [f g']_a^b + \int_a^b f g'' \, dx$$

se $f = g = 0$ su $\{a, b\}$

$$\int_a^b f'' \cdot g \, dx = \int_a^b f \cdot g'' \, dx$$

Siano $f, h \in C^2(A, \mathbb{R})$ tali che $f|_{\partial A} = g|_{\partial A} = 0$

Allora
$$\boxed{\iiint_A f \cdot \Delta h \, dm = \iiint_A \Delta f \cdot h \, dm}$$

$\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f)$

poniamo $g = \nabla f$

$$\iiint_A h\,\Delta f\,dm = -\iiint_A \langle \nabla h, \nabla f \rangle\,dm$$

scambio il ruolo tra h e f

$$\iiint_A f\,\Delta h\,dm = -\iiint_A \langle \nabla f, \nabla h \rangle\,dm$$

e quindi $\displaystyle\iiint_A \Delta f \cdot h\,dm = \iiint_A f \cdot \Delta h\,dm$

Si dice equazione di Laplace l'equazione differenziale alle derivate parziali

$\Delta f = 0$ (cioè si cerca una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

tale che $\Delta f(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$)

tutte le funzioni costanti sono soluzioni!

Chiediamo inoltre che $f|_{\partial\Omega} = 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$

Ω connesso

$$\begin{cases} \Delta f = 0 & \text{su } \Omega \\ f = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

BVP

$f = 0$ è l'unica soluzione

Supponiamo che f sia soluzione; allora $\boxed{f|_{\partial\Omega} = 0}$ e $\Delta f = 0$

$$\iiint_\Omega \langle \nabla f, \nabla f \rangle \, dm = - \iiint_\Omega f \cdot \Delta f \, dm = 0 \qquad f \in C^2$$

$$\Rightarrow \iiint_\Omega \|\nabla f\|^2 \, dm \Rightarrow \|\nabla f\|^2 = 0 \Rightarrow \nabla f = 0 \Rightarrow f = \text{costante}$$

$$\Rightarrow f = 0$$

l'integrale di una funzione ≥ 0 continua è zero

$\Rightarrow$ la funzione è zero

SIR modello per descrivere un'epidemia

S = suscettibili
I = infetti
R = rimossi

N individui

$$\boxed{N = S(t) + I(t) + R(t)}$$

$S(t)$

$I(t)$

$R(t)$

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta I \dfrac{S}{N} \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta I \dfrac{S}{N} - \gamma I \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases}$$

β tasso di infezione

γ tasso di rimozione

$R_0 = \beta / \gamma$

$$\boxed{\frac{d}{dt} I} = \left(\frac{\beta}{\gamma} \frac{S}{N} \gamma I - \gamma I \right) = \left(R_0 \frac{S}{N} - 1 \right) \gamma I$$

I cresce se $R_0 \dfrac{S}{N} > 1$

I decresce se $R_0 \dfrac{S}{N} < 1$

$S(0) \approx N \qquad R_0 > 1 \qquad R_0 < 1$

$R_t = R_0 \dfrac{S(t)}{N}$

$R_t > 1$ I cresce

$R_t < 1$ I decresce