ESERCIZI DI GEOMETRIA, FOGLIO 8

Trieste, 6 dicembre 2020

1. Calcolare il determinante della matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 27 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

2. Per ogni $n \geq 1$ calcolare il determinante della matrice $n \times n$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

3. Siano $x_1, \dots, x_n$ delle indeterminate. Dimostrare che
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i).$$
Si tratta del determinante detto *di Vandermonde*. (Suggerimento: trasformare la prima colonna in $(1, 0, \dots, 0)$ con trasformazioni elementari sulle righe togliendo a ogni riga un multiplo della riga precedente,....)

4. Calcolare il determinante di
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
e determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A è invertibile.

5. Le matrici $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ sono simili? Giustificare la risposta.

6. Dati n punti $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ in $\mathbb{R}^2$, con $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$, dimostrare che esiste esattamente un polinomio reale
$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$
di grado al più $n-1$, tale che $p(x_1) = y_1, \ldots, p(x_n) = y_n$. (Suggerimento: interpretare $p(x_1) = y_1, \ldots, p(x_n) = y_n$ come un sistema lineare di n equazioni in n incognite $a_0, \ldots, a_{n-1}$: qual è la matrice dei coefficienti di questo sistema lineare?)