Esercizi Algebra 1 - 9/12/20

(annaspagnolo97@gmail.com, francesco.digiorgio@studenti.units.it)

Esercizio 1

Si consideri il sottoanello $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ dell'anello dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Sia data l'applicazione $\nu\colon \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}$ definita da $\nu(a+bi) = a^2 + b^2$ per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Si dimostri che ν è un omomorfismo del monoide $(\mathbb{Z}[i], \cdot)$ nel monoide $(\mathbb{Z}, \cdot)$, (cioè $\nu(1_{\mathbb{Z}[i]}) = 1_{\mathbb{Z}}$ e $\nu(\alpha\beta) = \nu(\alpha)\nu(\beta)$);
2. Si osservi che se $z \in \mathbb{Z}[i]$ è un elemento invertibile dell'anello $\mathbb{Z}[i]$, allora $\nu(z) = 1$;
3. Si deduca che gli elementi invertibili dell'anello $\mathbb{Z}[i]$ sono tutti e soli gli elementi $1, -1, i, -i$.

Esercizio 2

Sia $\varphi\colon R \to S$ un omomorfismo di anelli con unità. Si provi che:

- Se R' è sottoanello di R, allora $\varphi(R')$ è sottoanello di S;
- Se S' è sottoanello di S, allora $\varphi^{-1}(S')$ è sottoanello di R;
- Se I è ideale di R, allora $\varphi(I)$ è ideale dell'anello $\varphi(R)$ (ma in generale non di S, trovare un controesempio);
- Se J è ideale di S, allora $\varphi^{-1}(J)$ è ideale di R.

Si supponga ora in aggiunta che φ sia suriettivo. Si provi che:

- Se P è un ideale primo di R contenente $\ker(\varphi)$, allora $\varphi(P)$ è ideale primo di S;
- Se P' è un ideale primo di S, allora $\varphi^{-1}(P')$ è un ideale primo di R;
- Se M è un ideale massimale di R, allora $\varphi(M)$ è ideale massimale di S;
- Se M' è un ideale massimale di S, allora $\varphi^{-1}(M')$ è un ideale massimale di R.

Esercizio 3

Sia A anello commutativo con unità. Sia $A[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \,|\, n \in \mathbb{N}, a_i \in A\,,\, i = 0, \ldots, n\}$ l'anello dei polinomi a coefficienti in A.

Si definisca $I = \{p(x) \in A[x] \,|\, p_0 = 0\}$. Si mostri che:

1. I è un ideale di $A[x]$;
2. I è ideale primo se e solo se A è un dominio d'integrità;
3. I è un ideale massimale se e solo se A è un campo.