Formula di Laplace $\qquad A \in M_n(\mathbb{K}) \qquad A = (a_{ij}) \rightsquigarrow A_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$

$$a_{ih}^* = (-1)^{i+h} |A_{ih}|$$

$$\det A = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} a_{ih}^* = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{i+h} a_{ih} |A_{ih}| \qquad \text{(secondo riga } i\text{-esima)}$$

$$\det A = \sum_{h=1}^{n} a_{hj} a_{hj}^* = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{j+h} a_{hj} |A_{hj}| \qquad \text{(secondo la colonna } j\text{-esima)}$$

<u>Corollario</u> Se $A \in M_n(\mathbb{K})$. Allora

(1) $$\boxed{A \cdot \mathrm{Cof}(A) = \det A \cdot I_n} = \begin{pmatrix} \det A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det A \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathrm{cof}\, A = {}^t(a_{ij}^*)} \in M_n(\mathbb{K})$$

Quindi se $\underline{\det A = 0} \Rightarrow \underline{A \cdot \mathrm{Cof}(A)} = O_n$

- Se $\underline{\det A \neq 0} \Rightarrow$ <u>A invertibile</u> e $A \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{Cof}\, A}{\det A}}_{= A^{-1}} = I_n$

Dim di (1)

$$(A \cdot \mathrm{Cof}\, A)_{ij} = \begin{cases} \det A & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$i = j$: $\quad (A \cdot \mathrm{Cof}\, A)_{ii} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} \cdot \underline{(\mathrm{Cof}\, A)_{hi}} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} \cdot a^{*}_{ih} = \det A.$

$i \neq j$: $\quad (A \cdot \mathrm{Cof}\, A)_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} (\mathrm{Cof}\, A)_{hj} = \underline{\underline{\sum_{h=1}^{n} a_{ih}\, a^{*}_{jh}}} = \begin{array}{c} \\ i \rightarrow \\ \\ j \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{vmatrix} = 0$

$$A' = \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix}$$

<u>Corollario</u> Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Allora A è <u>invertibile</u> $\Longleftrightarrow$

$\det A \neq 0$ $\underline{\Longleftrightarrow}$ $\underline{\operatorname{rg} A = n}$. In tal caso si ha:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{cof}(A)} \quad (2)$$

<u>Dim</u> $\underline{A \cdot \operatorname{cof}(A) = (\det A) \cdot I_n}$

$\Longrightarrow)$ A invertibile $\underset{\text{T. di Binet}}{\Longrightarrow}$ $\det A \neq 0$ e $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

$\Longleftarrow)$ $\det A \neq 0 \Longrightarrow A \cdot \left(\frac{\operatorname{cof} A}{\det A}\right) = I_n \Longrightarrow$ A invertibile e (2)

Uso del determinante $\quad A \in M_n(\mathbb{K})$

- A invertibile? $\begin{cases} \text{SI se } \det A \neq 0 : A^{-1} = \dfrac{\operatorname{cof} A}{\det A} \\ \text{NO se } \det A = 0 \end{cases}$

- $\operatorname{rg} A = n$? $\begin{cases} \text{SI se } \det A \neq 0 \\ \text{NO se } \det A = 0 \end{cases}$

- Dati $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$, sono lin. indip.? (sono base) $\begin{cases} \text{SI se } \det(v_1 \dots v_n) \neq 0 \\ \text{NO se } \det(v_1 \dots v_n) = 0 \end{cases}$

Esempio

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\det A = 5$ $\operatorname{Cof} A = {}^t\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

2)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det B = -3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 3 = -9$$

$\Rightarrow$ B <u>invertibile</u>

$$\text{cof } B = {}^{t}\begin{pmatrix} -4 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \\ 8 & -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 8 \\ -3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{9}\,\text{cof } B.$$

Sistemi lineari di n equazioni in n incognite

Regola di Cramer Sia $A \in GL_n(\mathbb{K})$ ($\Longleftrightarrow \det A \neq 0$) e consideriamo il sistema

$$\boxed{AX = b} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

Allora il sistema è compatibile e si ha $\underline{X = A^{-1} b}$. Inoltre

$$(3) \qquad x_i = \frac{\left| A_{(1)} \cdots A_{(i-1)} \; b \; A_{(i+1)} \cdots A_{(n)} \right|}{|A|}, \quad i = 1, \dots, n$$

Dim di (3)

$$X = A^{-1} b = \overbrace{\frac{1}{\det A} (\mathrm{Cof}\, A)}^{A^{-1}} \cdot b$$

LAPLACE

i-esima colonna

$$x_i = \frac{1}{|A|} \sum_{h=1}^{n} (\mathrm{Cof}\, A)_{ih}\, b_h = \frac{1}{|A|} \sum_{h=1}^{n} a_{hi}^{*}\, b_h = \frac{|A_{(1)} \cdots b \cdots A_{(n)}|}{|A|}$$

Esempio

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -5x + 4y = -1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$\det A = 2$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}}{2} = 9 \\ \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}}{2} = 11 \end{cases}$$

Problema della diagonalizzazione degli endomorfismi

V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale $\dim V = n$

$f : V \longrightarrow V$ endomorfismo (appl. lineare)

$\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ base di V (sia per il dominio che per il codominio)

$$\rightsquigarrow \quad A = M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}}(f) \in M_n(\mathbb{K})$$

<u>Problema</u>: esiste una base rispetto alla quale $M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}}(f)$ è <u>diagonale</u>?

$$A = M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}}(f) = \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} \Big| & \Big| & \cdots & \Big| \end{pmatrix}} \\ f(v_1) & f(v_2) & \cdots & f(v_n) \end{array}$$

$$X \in \mathbb{K}^n \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$X^{\mathcal{V}} = \underline{x_1 v_1 + \dots + x_n v_n}$$

$$\left(A_{(j)}\right)^{\mathcal{V}} = \underline{f(v_j)}$$

Se $\mathcal{V}' = (v_1', \dots, v_n')$ è un'altra base di V e $A' = M^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}'}(f)$ allora A e A' sono <u>simili</u>!

$$\exists\, \underline{S \in GL_n(\mathbb{K})} \text{ t.c. } \boxed{A' = S^{-1} A S}$$

$$S = M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}'}(\mathrm{id}_V)$$

matrice del cambiamento di base

Prop $A, A' \in M_n(\mathbb{K})$ matrici simili $\Longrightarrow \det A' = \det A$

Dim $A' = S^{-1} A S$, $S \in GL_n(\mathbb{K})$

$$\det A' = \det(S^{-1} A S) \underset{\text{BINET}}{=} \det(S^{-1}) \det A \det S = \det A$$

$f : V \longrightarrow V$ endomorfismo

Def. $\det f := \det\left(M^{v}_{v}(f)\right)$ rispetto ad una base arbitraria v di V.

(dipende solo da f)

<u>Diagonalizzazione</u> $\quad f: V \longrightarrow V \quad , \quad n = \dim V$

Cerchiamo una base $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ di V t.c.

$$M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 \cdots 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$$

(base diagonalizzante per f)

$f(v_1) = \lambda_1 v_1$

$f(v_2) = \lambda_2 v_2 \quad \dots \quad f(v_n) = \lambda_n v_n$

<u>Def</u> Se f ammette una base diagonalizzante, diremo che f è diagonalizzabile.

$v = (v_1, \dots, v_n)$ è base diagonalizzante per $f \iff$

$\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ t.c.

$$f(v_i) = \lambda_i v_i \qquad \forall\, i = 1, \dots, n$$

<u>Def</u> Sia $f : V \longrightarrow V$ endomorfismo. Uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ è detto autovalore per f se $\exists\ \underline{v \in V - \{0\}}$ t.c.

$$f(v) = \lambda v.$$

Se $\lambda \in \mathbb{K}$ è auto-valore per f e $v \in V - \{0\}$ è t.c. $f(v) = \lambda v$, allora v è detto <u>autovettore</u> di f relativo a λ.

OSS $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore per $f: V \to V$ $\iff$ $\exists\, v \in V - \{0\}$ t.c.

$f(v) = \lambda v$ $\iff$ $\exists\, v \in V - \{0\}$ t.c. $\underline{f(v) - \lambda v} = 0_V$ $\iff$

$\exists\, \underline{v \in V - \{0\}}$ t.c. $\underline{(f - \lambda\, id_V)(v) = 0_V}$

$f - \lambda\, id_V \in End(V)$

spazio degli endomorfismi di V.

$\iff$ $\boxed{Ker(f - \lambda\, id_V) \neq \{0\}}$

Sia $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ base qualunque di V

$A = M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}}(f)$

$M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}}(f - \lambda\, id_V) = A - \lambda I_n$

$Ker(f - \lambda\, id_V) \neq 0$ $\iff$ $\boxed{\det(A - \lambda I_n) = 0}$