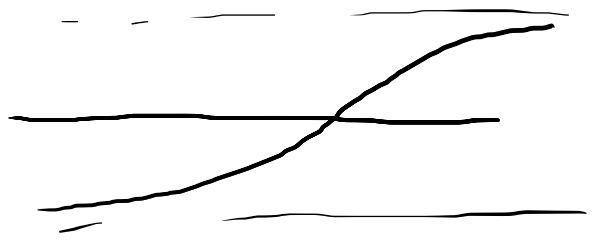
Alcune applicazioni della Regola di De L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{\operatorname{sen} x}$$

arctg : ha per dominio $\mathbb{R}$



è limitata $\quad -\pi/2 < \arctan x < \pi/2$

è dispari $\quad \arctan(-x) = -\arctan(x)$

NON è periodica

è monotona crescente

$\operatorname{sen} x$ ha per dominio $\mathbb{R}$

è limitata $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$

è periodica (di periodo 2π)

è dispari ($\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$)

NON è monotona

<u>Oss</u>

$x \longmapsto \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{sen} x}$ è definita in $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \quad k \in \mathbb{Z}\}$

NON è limitata

è pari e NON

è periodica

$$\frac{\operatorname{arctg}(-x)}{\operatorname{sen}(-x)} = \frac{-\operatorname{arctg} x}{-\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{sen} x}$$

Ricordo poi che

$$(\operatorname{arctg})' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{sen})'(x) = \cos x$$

pertanto sia la funzione arctg che la funzione seno sono derivabili in $\mathbb{R}$.

Considero quindi

$$\frac{(\operatorname{arctg})'(x)}{(\operatorname{sen})'(x)} = \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\cos x}$$

e applico la regola di de L'Hôpital ; essendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\cos x} = 1$$

deduco che $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{sen} x} = 1$

Confronto fra funzioni infinitesime (infinite)

Def Diremo che f è INFINITESIMA (infinita) al tendere di x a x_0

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ $(\pm \infty)$

IL LIMITE di f al tendere di x a x_0 esiste ma non è finito

Oss Se f è infinitesima al tendere di x a x_0, la funzione reciproca di f ovvero

$x \longmapsto \dfrac{1}{f(x)}$ è infinita e viceversa

Def Siano f e g due funzioni infinitesimo (infinite) al tendere di x a $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Diremo che f è infinitesimo (infinito) di ordine superiore a quello di g al tendere di x a x_0 se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ $(\pm\infty)$

Diremo che f e g sono infinitesimo (infinite) dello stesso ordine al tendere di x a x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

L'idea nasce dal confronto di limiti di rapporti di funzioni polinomiali.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } d_P > d_Q \\ l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{se } d_P = d_Q \\ 0 & \text{se } d_P < d_Q \end{cases}$$

P, Q polinomi di grado rispettivamente d_P e d_Q

$x \mapsto e^x$ non è polinomiale, come non lo sono $\ln x$, $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{arctg} x$, ...

Tuttavia

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}}}$$

Applichiamo n volte la regola di L'Hôpital

$$\frac{e^x}{x^n} \to \frac{e^x}{n x^{n-1}} \to \cdots \to \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!} \to$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Applico la Regola di de L'Hôpital

$$\frac{\frac{1}{x}}{1} \xrightarrow{x \to +\infty} 0$$

L'ordine di infinito di $\ln x$ è inferiore a quello di x^n in quanto $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^n} = 0$ $\boxed{n \geq 2}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} \cdot \frac{x^n}{\ln x} = +\infty$$

Più in dettaglio diremo che $f(x)$ è infinito di ordine k ($k \in \mathbb{R}^+$) al tendere di x a $+\infty$ se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^k} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

e $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{k'}} = 0 \qquad k' > k.$$

Analogamente diremo che f è infinitesimo di ordine k al tendere di x a $x_0 \in \mathbb{R}$ se $\left(k \in \mathbb{R}^+\right)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^k} = \ell \in \mathbb{R}$$

ma

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^{k'}} = \pm\infty \quad \text{se } k' > k.$$

Per esempio dai limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

possiamo dire che sen x e la funzione $e^x - 1$ sono infinitesime di ordine 1 al tendere di x a $0 = x_0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^{k'}} \overset{k'>1}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{x^{k'-1}} \overset{k'-1>0}{=} \pm\infty$$

$k' < 1 \qquad 1 - k' > 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^{k'}} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{x}{x^{k'}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot x^{1-k'} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x} = 1 = \lim_{x \to 0} \boxed{\frac{e^x - 1}{\cancel{x}}} \cdot \frac{\cancel{x}}{\operatorname{sen} x} = 1$$

de Hôpital

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{\cos x} = 1 \checkmark}$$

Qual è l'ordine di infinitesimo della funzione $x \longrightarrow 1-\cos x$ in $x_0=0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^k}$$

$k=1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)}{x}\frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = 0$$

L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} + \frac{\operatorname{sen} x}{1} = 0$$

$k = 1$ NON va bene

$k = 2$ è OK

infatti $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos x} =$

$= 1/2$ ✓

L'Hôpital

$\frac{+\operatorname{sen} x}{2x} \to \frac{1}{2}$ ✓

In generale, se f è infinitesimo al tendere di x a x_0 cerchiamo $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^k} = l \in \mathbb{R}$$

per trovare l'ordine di infinitesimo di f in x_0

Hôpital

$$\frac{f'(x)}{k \cdot (x-x_0)^{k-1}} \qquad \frac{f''(x)}{k(k-1)(x-x_0)^{k-2}}$$

A livello di notazione, se f e g sono infinitesime per x che tende a x_0

e $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

allora si usa anche scrivere

che f è un $o(g; x_0)$

"o piccolo" di g in x_0

o di Landau