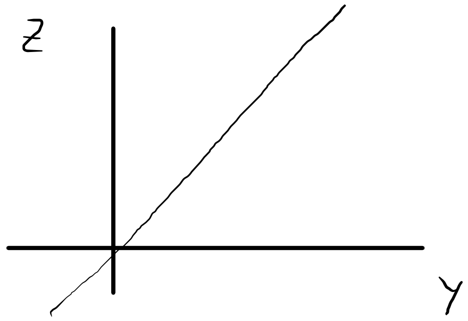
$g(x,y,z) = (-z, x, y)^T$

$z = y$

$z = x^2 + y^2$

$B\left((0, \frac{1}{2}), \frac{1}{2}\right)$



$$\left| \int_\gamma \langle g, \tau \rangle \, ds \right|$$

$$\oint_{\partial\sigma^+} \langle g, \tau \rangle \, ds = \iint_\sigma \langle \operatorname{rot} g, \omega \rangle \, d\sigma$$

$$\operatorname{rot} g = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right)^T = (1, -1, 1)^T$$

$x^2 + y^2 - y \le 0$

$\underbrace{x^2 + y^2 - 2\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{4} \le \tfrac{1}{4}}$

$x^2 + (y - \tfrac{1}{2})^2 \le \tfrac{1}{4}$

$x = \rho \cos\vartheta \quad y = \rho \sin\vartheta$

$$\underbrace{\left| \int_\gamma \langle g, \tau \rangle \, ds \right| = \iint_? \langle (1,-1,1)^T, \omega \rangle \, d\sigma}$$

$\hat{\imath}?$

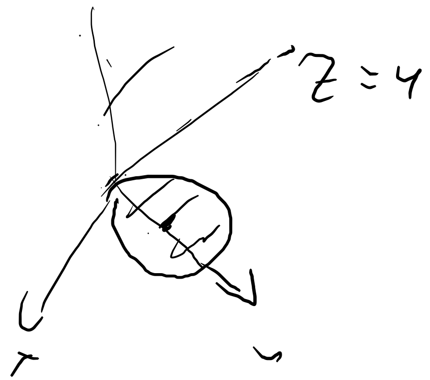
$x^2 + y^2 \le y$

$$\left\{ (x,y,z)^T : \boxed{z = y} \quad x^2 + y^2 \le z \right\}$$

cerchiamo σ tale che $\quad z = y$

$\partial\sigma = \gamma$

σ :



$$\sigma(\rho,\vartheta) = \left(\rho\cos\vartheta,\ \frac{1}{2} + \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta,\ \frac{1}{2} + \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\right)^T$$

$$\vartheta \in [0, 2\pi] \qquad 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \rho} = \left(\cos\vartheta,\ \mathrm{sen}\,\vartheta,\ \mathrm{sen}\,\vartheta\right)^T$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta} = \left(-\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta,\ \rho\cos\vartheta,\ \rho\cos\vartheta\right)^T$$

$$\nu = \left(\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta - \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta,\ -\rho\,\mathrm{sen}^2\vartheta - \rho\cos^2\vartheta,\ \rho\cos^2\vartheta + \rho\,\mathrm{sen}^2\vartheta\right)^T$$

$$= (0, -\rho, \rho)^T \qquad \iint_\sigma \langle (1,-1,1)^T, \nu \rangle \, d\sigma =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1/2} \cancel{1\cdot 0} - 1\cdot\underset{\rho}{(-\rho)} + 1\cdot\rho \; d\rho \right) d\vartheta = 2\pi \cdot \int_0^{1/2} 2\rho \, d\rho = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Equazioni differenziali

Dinamica di popolazioni 1800 Malthus

$N = N(t)$ $\quad$ ν coefficiente di natalità $\quad$ μ coeff. di mortalità

$$N(t+\Delta t) = N(t) + \underbrace{\nu \cdot \Delta t\, N(t) - \mu \Delta t\, N(t)}$$

$$+ (\nu - \mu)\Delta t\, N(t)$$

$$\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = (\nu-\mu) N(t) \qquad \Delta t \to 0$$

$$(*) \quad \boxed{N'(t) = (\nu-\mu) N(t)}$$

cerchiamo $N(t)$ che verifica $(*)$ per ogni t

$N(t) = 0$ è soluzione

$$N(t) = C \cdot e^{(\nu-\mu)t}$$

$$N'(t) = C \cdot (\nu-\mu)\, e^{(\nu-\mu)t} = (\nu-\mu) N(t)$$

Ci sono infinite soluzioni $\quad C e^{(\nu-\mu)t}$ con $C \in \mathbb{R}$

$$N(t) = C e^{(\nu-\mu)t}$$

$C = N(0)$ "condizione iniziale"

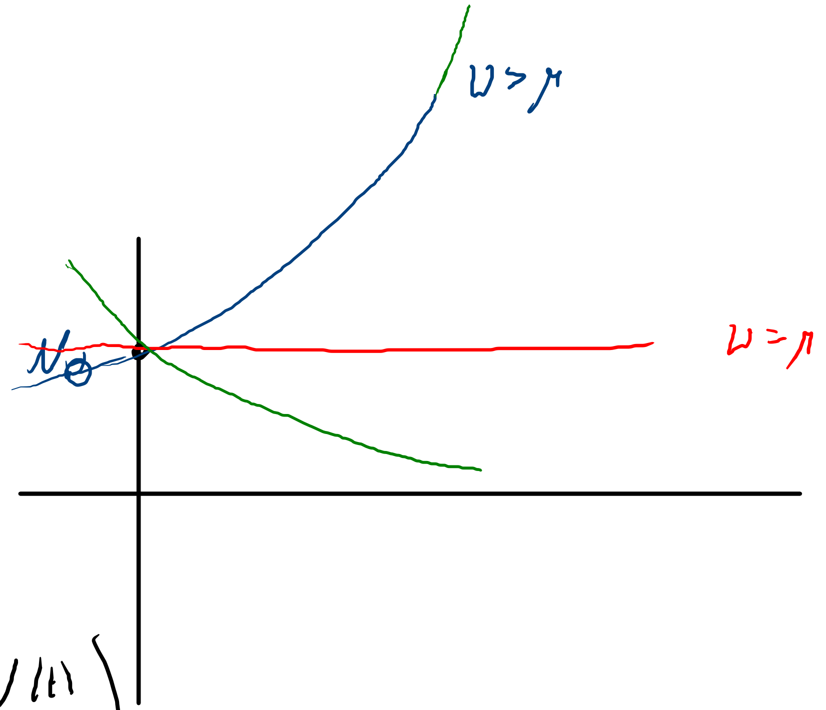
$$\begin{cases} N' = (\nu - \mu) N \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

la soluzione è unica $N(t) = N_0 e^{(\nu-\mu)t}$

se $\nu - \mu > 0$ $\qquad N_0 e^{(\nu-\mu)t}$ crescente

se $\nu - \mu = 0$ $\qquad N_0$ costante

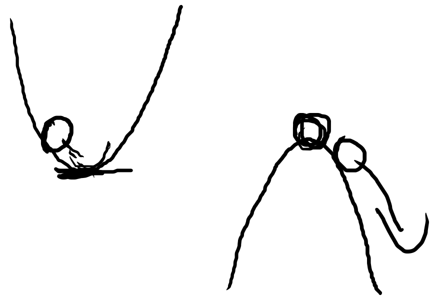
$\nu - \mu < 0$ $\qquad N$ decrescente



Gompertz $\qquad N' = -r N(t) \log\left(\frac{N(t)}{K}\right)$

se $N_0 = K$ $\qquad \log\left(\frac{N_0}{K}\right) = \log\left(\frac{K}{K}\right) = 0$ $\qquad N_0$ soluzione costante

$N' = -rN\log\left(\frac{N}{K}\right)$ $\qquad N_0 = K$ sol. costante



$N_0 > K \qquad \log\left(\frac{N_0}{K}\right) > 0 \qquad N$ decresce $\quad [N' < 0]$

$N_0 < K \qquad \log(\ \ ) < 0 \qquad N$ cresce

K rappresenta la capacità ambientale ed è il valore a cui tende

N(t) qualunque sia la condizione iniziale N_0

K si dice un equilibrio del problema; ed è un equilibrio stabile

perché se $N \simeq K$ si ha che N si avvicina a K

Modello logistico di P.F. Verhulst 1838

$$N' = (\nu - \mu) N - \varepsilon N^2$$

ε attrito sociale

se N è piccolo il modello è quello di Malthus

se N è grande l'attrito sociale è importante

$$= (\nu - \mu) N \left[1 - \frac{\varepsilon}{\nu - \mu} N \right]$$

$$\boxed{N' = (\nu - \mu) N \left(1 - \frac{1}{K} N \right)}$$

$$\boxed{K = \frac{\nu - \mu}{\varepsilon}}$$

capacità ambientale

equilibrio: $N = 0$

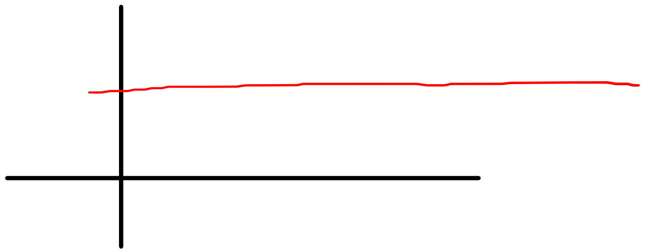
eq. instabile

$$\boxed{\text{equilibrio } N = K}$$

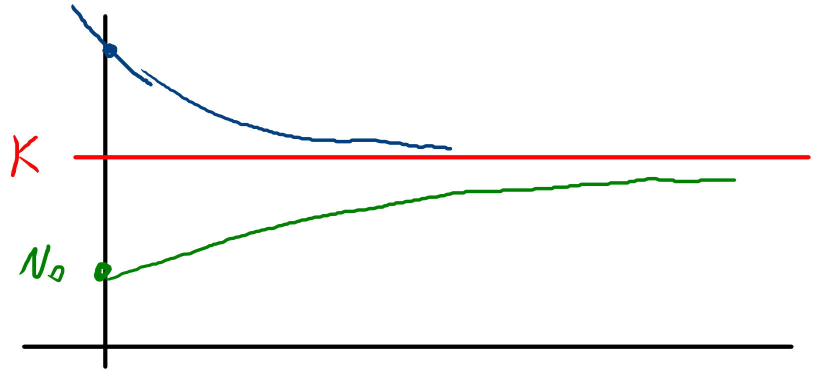
equilibrio stabile

$$N' = (w-\mu)\, N \left(1 - \frac{1}{K} N\right)$$

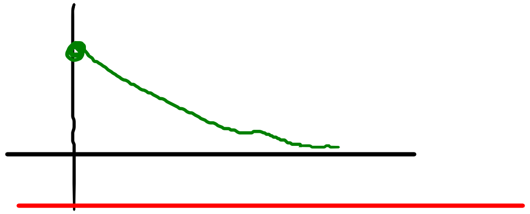
se $w-\mu=0$ $\quad N'=0$ soluz. costante $\forall K$



se $w>\mu$



se $w<\mu$ $\quad K=\frac{w-\mu}{\varepsilon}<0$



se $0<N_0<K$ $\quad N'(0) = \underbrace{(w-\mu)}_{>0} N_0 \underbrace{\left(1-\frac{1}{K}N_0\right)}_{>0} > 0$ $\quad N(t)$ cresce

$N'(t)>0$ se $N(t)<K$

se $N_0>K$ $\quad 1-\frac{1}{K}N_0<0$ $\quad N'(0)<0$ $\quad N'(t)<0$ se $N(t)>K$

Modello degli orsi

$$N' = (b-\mu) N \left(1 - \frac{N}{K}\right)\left(1 - \frac{m}{N}\right)$$

$m > 0$

se N è grande $\frac{m}{N}$ è piccolo

$1 - \frac{m}{N} \approx 1$

se N è grande ho il modello Verhulst

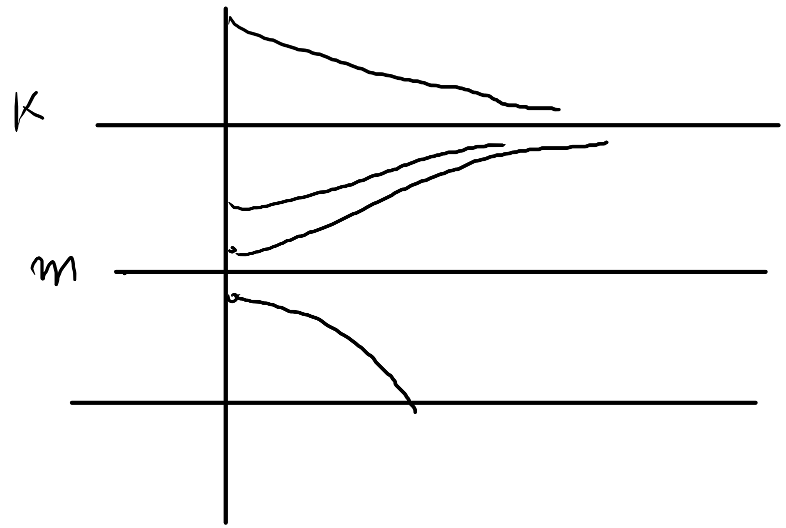
se N è piccolo $1 - \frac{m}{N}$ è significativo

m è la difficoltà di accoppiamento

3 equilibri $N = 0$

$N = K$

$N = m$



Modello della pesca

$$N' = (\nu-\mu) N \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \overbrace{P(N)}^{a N}$$

funzione di N "prelievo"

$$\boxed{P(N) = \text{costante}}$$

$$N' = (\nu-\mu) N \left(1 - \frac{N}{K}\right) - P$$

se N è grande e P è piccolo va bene; se però N_0 è basso il termine P porta all'estinzione

$$\boxed{P(N) = a N}$$

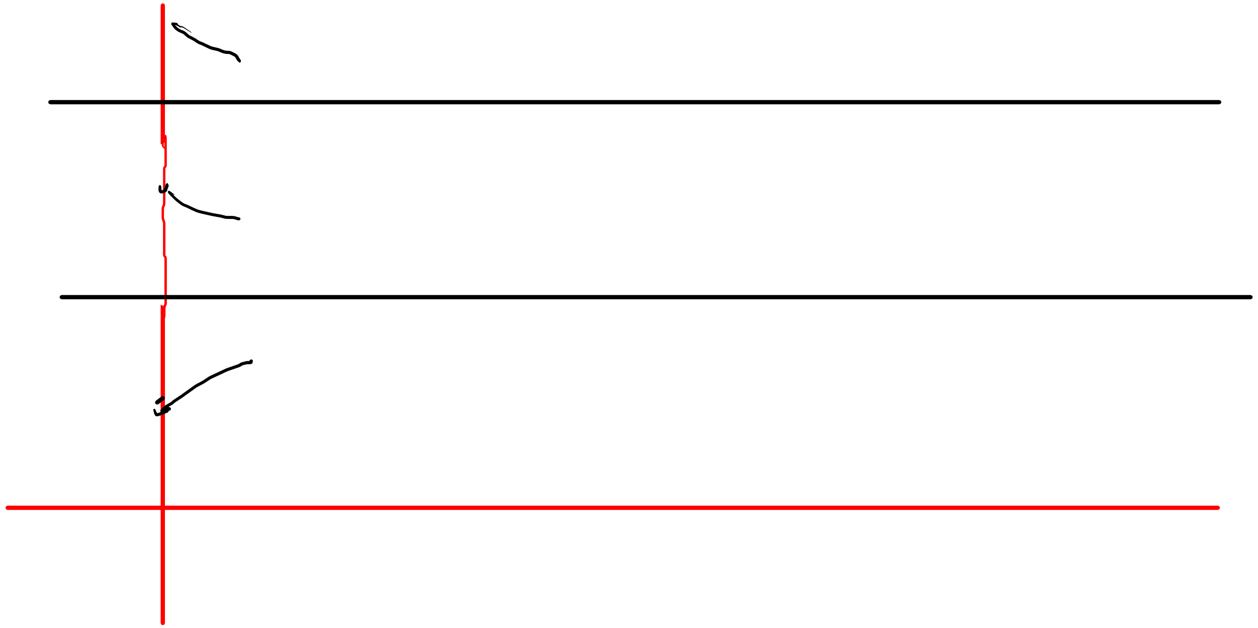
$$N' = (\nu-\mu) N \left(1 - \frac{a}{\nu-\mu} - \frac{N}{K}\right)$$

$$K = \frac{\nu-\mu}{\varepsilon}$$

$$\left(1 - \frac{N + a}{(\nu-\mu)\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)}\right)$$

è di nuovo il modello logistico

cambia K



Equazione differenziale: è un'equazione funzionale (l'incognita è una funzione) in cui l'incognita funzionale appare con almeno una derivata

Es: trovare f tale che $f(x_1+x_2) = f(x_1)\cdot f(x_2)$ $\quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$f(x) = a^x$ è soluzione

Es: $\boxed{(xy)' + \log(xy) = 5}$ $\qquad$ chi è x? chi è y?

$y = y(x) \qquad x = x(y) \qquad x(t) \quad y(t)$

$x' = 4xt \rightsquigarrow x = x(t)$

la variabile funzionale può essere una funzione in una sola variabile o in più variabili

Es: equazione del calore $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t} = K \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$

$u = u(t, x)$ u è la variabile funzionale

PDE

Un'equazione differenziale si dice "alle derivate parziali" se l'incognita è una funzione in più variabili; si dice "ordinaria" se è in una sola variabile

ODE

Diremo ordine di un eq. diff. il massimo ordine di derivazione che appare nell'incognita

Un'equazione si dice autonoma se non appaiono esplicitamente le variabili della funzione incognita

$x' - tx + 1 = 0$ non è autonoma

$x = x(t)$

Un equazione ordinaria si dice in forma normale se è esplicita rispetto alla derivata di ordine massimo

$$y''' = 3xy'' + 2y - \log(xy) \qquad y = y(x)$$

$$\log(y''x) = 3$$

$$P_n(y^k \leadsto y^{(k)})$$

eq. lineari ordinarie

$a_i \in C(\mathbb{R})$

$a_i = a_i(x)$

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

ODE

$$y^{(n)} = \underline{\qquad}$$

$$P_n(y) = \underbrace{a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y + a_0}$$

In generale un'equazione differenziale si può scrivere nella forma

$$\cancel{F\left(\frac{\partial^k u}{\partial x_i}, u, x_1, \dots, x_N\right) = 0}$$

$\cancel{k = 1, \dots, n}$

$\cancel{i = 1, \dots, N}$

ODE (*) $\boxed{F\left(u^{(n)}, u^{(n-1)}, \dots, u, x\right) = 0}$

con $F : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

l'equazione (*) si dice lineare se la funzione F è lineare rispetto alle variabili funzionali

$$\mathrm{sen}(t)\, u'' + 2t^3 u' - 4u = e^t$$

eq. diff. ordinaria lineare del 2° ordine

$u = u(t)$

$$\boxed{a_2(t) \cdot u'' + a_1(t) \cdot u' + a_0(t)\, u = b(t)}$$

$\Delta u = 0$ eq. di Laplace PDE lineare autonoma del secondo ordine

$y'' = g$ caduta di un grave nel vuoto

ODE del 2° ordine autonoma

$y = y(t)$

$y' = gt + c_1$

$y = \frac{1}{2} g t^2 + c_1 t + c_2$

$c_2 = y(0)$

$c_1 = y'(0)$

condizioni iniziali

con attrito $m y'' = mg - k y'$ <u>lineare</u>

k coeff. di attrito

molle (oscillatore armonico) $m x'' = -kx - \gamma x' + f(t)$ <u>lineare</u>

termine forzato

$x = x(t)$ forza di richiamo attrito

Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

$F(x, u, u') = 0$ $\quad F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad F(x, y, z)$

$u = u(x)$

in forma normale $\quad u' = f(x, u)$ $\quad f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Es: $f(x,y) = 2xy$ $\quad u' = 2xu$ $\quad$ soluzioni: $u(x) = a e^{x^2}$ $\quad a \in \mathbb{R}$

$u'(x) = a e^{x^2} \cdot 2x = 2x\, u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Definizione di soluzione

Sia $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad$ (E) $\quad F(x, u, u') = 0$

Diciamo soluzione di (E) $F(x,u,u')=0$ ogni funzione

φ derivabile su I

$\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\boxed{I \text{ intervallo}}$ tale che per ogni $x\in I$ $(x, \varphi(x), \varphi'(x))^T \in \Omega$

$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$ per ogni $x \in I$

[se in forma normale (E) $u' = f(x,u)$ $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

φ è soluzione se $\varphi : I \to \mathbb{R}$ I intervallo φ derivabile su I

$\forall x \in I$ $(x, \varphi(x))^T \in A$ e $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ $\forall x \in I$]

Es: $F(x,y,z) = xz + y$ $\boxed{x u' + u = 0}$

considero $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $x \cdot \varphi'(x) + \varphi(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 0$ $\forall x \neq 0$

φ è soluzione? NO perché non è definito su un intervallo.

Invece $\varphi_1 :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ $\varphi_1(x) = \frac{1}{x}$ è soluzione; $\varphi_2 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ $\varphi_2(x) = \frac{1}{x}$ è soluzione

Problema di Cauchy (ai dati iniziali)

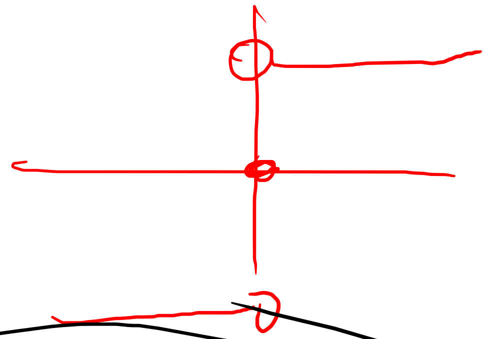
$$(CP) \quad \begin{cases} u' = f(x,u) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x_0, u_0)^T \in A \end{array}$$

Diremo soluzione del problema (CP) una funzione definita su un intervallo $\varphi: I \to \mathbb{R}$ tale che φ derivabile, $\forall x \in I \ (x, \varphi(x))^T \in A$, $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$; e inoltre $\varphi(x_0) = u_0$.

Esempi ① $\begin{cases} u' = u \\ u(0) = 2 \end{cases}$ $\quad u(x) = 2e^x \quad u: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad$ u è unica

$$\left[f(x,y) = y \right]$$
$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

② $f(x,y) = \begin{cases} -1 & \text{se } x<0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ 1 & \text{se } x>0 \end{cases}$ $\qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



$$\begin{cases} u' = f(x,u) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

$\cancel{u(x) = x}$ $\qquad u'(-2) = -1$

$\cancel{u'(x) = 1 \quad \forall x}$

$\cancel{u'(x) = e^x \neq f(x,\cdot)}$!

NON ESISTE SOLUZIONE

$\cancel{u(x) = |x|}$ $\qquad u'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x<0 \\ 1 & \text{se } x>0 \end{cases}$?? $\quad$ non è derivabile

$\cancel{u(0) = 0}$

$u'(x)$ ha un salto in 0

NON PUÒ ESSERE

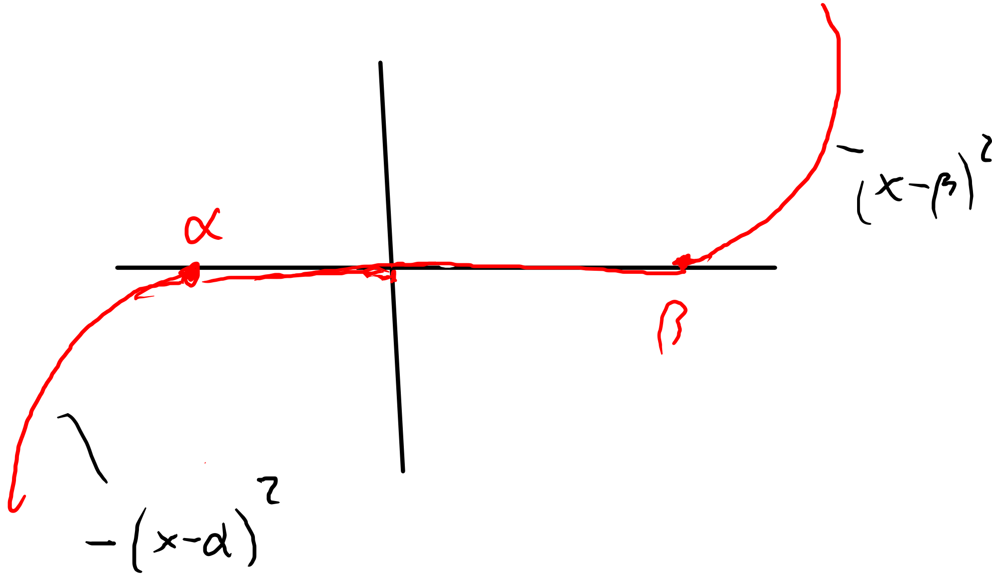
(3)

$$\begin{cases} u' = 2\sqrt{|u|} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

una soluzione è $u \equiv 0$

$u(x) = x^2$ è soluzione su $[0,+\infty[$

$u' = 2x = 2\sqrt{|x^2|}$



$u(x) = -x^2$ è soluzione su $]-\infty,0]$

$u'(x) = -2x = 2|x| = 2\sqrt{|-x^2|}$

$x<0$

$$u(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x<0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Ci sono infinite soluzioni definite su $\mathbb{R}$.

$$u(x) = \begin{cases} -(x-\alpha)^2 & x \leq \alpha \\ 0 & \text{se } \alpha < x < \beta \\ (x-\beta)^2 & x \geq \beta \end{cases}$$

è soluzione

(Pennello di Peano)

4

$$\boxed{\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 1 \end{cases}}$$

$u \neq 0$

$f(x,y) = y^2 \quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$-\frac{1}{u(x)} + 1 = x$$

$$\frac{u'}{u^2} = 1 \qquad \int_0^x \frac{u'(t)}{u(t)^2}\,dt = \int_0^x 1\,dt = x$$

$$1 - x = \frac{1}{u(x)}$$

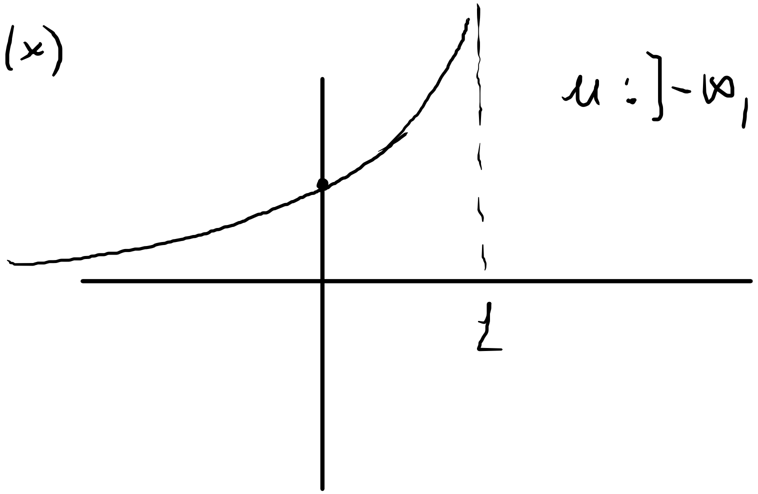
$\parallel$ $z = u(t)$

$dz = u'(t)\,dt$ se $t = 0 \rightsquigarrow z = u(0) = 1$

se $t = x \rightsquigarrow z = u(x)$

$$\int_1^{u(x)} \frac{1}{z^2}\,dz = \left[-\frac{1}{z}\right]_1^{u(x)} = -\frac{1}{u(x)} + 1$$

$$\boxed{u(x) = \frac{1}{1-x}}$$



$u: \,]-\infty, 1[\, \to \mathbb{R}$

Nell esempio (4) il problema ha una ed una soluzione $u(x) = \frac{1}{1-x}$ che NON è globale.

Definizione