Diagonalizzazione

$f : V \longrightarrow V \quad , f \in End(V) \quad \rightsquigarrow \det f := \det\left(M^{v}_{v}(f)\right)$

$\lambda \in \mathbb{K}$ è **autovalore** di $f \overset{def}{\iff} \exists\, v \in V - \{0\}$ t.c.

$$f(v) = \lambda v$$

$$\iff \left(f - \lambda\, id_V\right)(v) = 0 \iff$$

$$\boxed{Ker\,(f - \lambda\, id_V) \neq 0 = \{0\}}$$

$v = (v_1, \dots, v_n)$ base di V

$$\det(f - \lambda id_V) = 0 \iff Ker\,(f - \lambda\, id_V) \neq 0 \iff \det(A - \lambda I_n) = 0, \quad A = M^{v}_{v}(f)$$

Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ allora si pone

$$P_A(x) := \left| A - x I_n \right| \in \mathbb{K}[x]_n$$

$A = (a_{ij})$

$$= \begin{vmatrix} (a_{11} - x) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - x) & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & (a_{nn} - x) \end{vmatrix} = (-1)^n x^n + K(x)$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn} \sigma \, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$\boxed{\deg K(x) < n}$$

$$(a_{11} - x) \cdots (a_{nn} - x) = (-1)^n x^n + (\text{termini di deg} < n)$$

Def $P_A(x) \in \mathbb{K}[x]_n$ è detto polinomio caratteristico di A

Prop. Dato $f \in End(V)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di $f \iff$

$P_A(\lambda) = 0$, dove $A = M^{v}_{v}(f)$, per una qualunque base v di V.

$f : V \longrightarrow V$

Prop. Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

Dim. $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sono simili $\implies \exists\, S \in GL_n(\mathbb{K})$ t.c. $B = S^{-1} A S$

$$P_B(x) = |B - x I_n| = |S^{-1}AS - xI_n| = |S^{-1}(A - xI_n)S| =$$

(Binet) $$= \cancel{|S^{-1}|}\, |A - xI_n|\, \cancel{|S|} = P_A(x).$$

$f \in End(V) \rightsquigarrow$
$P_f(x) := P_A(x)$
$A = M^{v}_{v}(f)$.

Per trovare gli autovalori di $f \in End(V)$ si deve risolvere un'equazione di grado $n = \dim V$.

$$\boxed{p_f(x) = 0}$$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\quad \boxed{x^2 + 1 = 0}$ non ha sol. reali

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\quad x = \pm i$

Teorema fondamentale dell'algebra

Se $p \in \mathbb{C}[x]$ è un polinomio di $\deg p \geq 1$ allora p ammette almeno uno zero in $\mathbb{C}$.

Prop. Se $p \in \mathbb{K}[x]$, $\deg p \geq 1$, e $\lambda \in \mathbb{K}$ è zero di p, cioè $p(\lambda) = 0$, allora $x - \lambda$ divide p, cioè $\exists\, q \in \mathbb{K}[x]$ t.c. $p = (x-\lambda)\, q$.

Dim. Facciamo la divisione con resto di p per $(x-\lambda)$

$$p = (x-\lambda)\, q + r \quad , \quad \deg r < 1 \implies r \in \mathbb{K}$$

$$0 = p(\lambda) = 0 \cdot q + r = r \implies p = (x-\lambda)\, q$$

$\square$

OSS. $\deg q = \deg p - 1$

Se $q(\lambda) = 0$ allora $q = (x-\lambda)\, q_1$

$\deg q_1 < \deg q \implies p = (x-\lambda)^2 q_1$

$\cdots \implies \boxed{p = (x-\lambda)^a\, q}$ per un certo q con $q(\lambda) \neq 0$.

Se $p \in \mathbb{C}[x]$, $\deg p \geq 1 \Longrightarrow$

$$\boxed{p = c\,(x-\lambda_1)^{a_1} \cdots (x-\lambda_r)^{a_r}}\ , \quad c \in \mathbb{C}-\{0\}$$

$\lambda_i \in \mathbb{C}$, $\quad a_i \in \mathbb{N}-\{0\}$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \rightsquigarrow L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

1) autovalori

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2 - 2 = x^2 - 2x - 1$$

$$\begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = |A - x I_2|$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$$ autovalori

$\boxed{\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}}$ autovettori $(A - \lambda_1 I_2) X = 0$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$x - \sqrt{2}\, y = 0$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\, t \\ y = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$

$$(A - \lambda_2 I_2) X = 0$$

$$A v_1 = (1+\sqrt{2})\, v_1$$

$$A v_2 = (1-\sqrt{2})\, v_2$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$x + \sqrt{2}\, y = 0$$

$$\begin{cases} x = -\sqrt{2}\, t \\ y = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ \\ v_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

base di $\mathbb{R}^2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile, simile a $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$A = S \quad D \; S^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = - -$$

$p = c\,(x-\lambda_1)^{a_1} \cdots (x-\lambda_r)^{a_r} \in \mathbb{K}[x]$, $\quad \lambda_i$ sono a due a due distinti:

$a_1 + a_2 + \cdots + a_r = \deg p \qquad \lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i \neq j$

a_i è detto molteplicità di λ_i

$a_i \in \mathbb{N} - \{0\}$

$c \in \mathbb{K}$

Più in generale se $p \in \mathbb{K}[x]$, $\deg p \geq 1$, e $\lambda \in \mathbb{K}$ è zero di p, $p(\lambda) = 0 \implies$

$$p = (x-\lambda)^a\, q \quad , \; q \in \mathbb{K}[x] \text{ t.c. } q(\lambda) \neq 0$$

Def $a \in \mathbb{N} - \{0\}$ è detto molteplicità di λ come zero di p

$$\boxed{a \leq \deg p}$$

Sia ora $f: V \longrightarrow V$ endomorfismo

$\lambda \in \mathbb{K}$ autovalore di f

$\left(\iff \exists\, v \in V - \{0\} \text{ t.c. } f(v) = \lambda v \right)$

$\iff P_f(\lambda) = 0 \rightsquigarrow m_a(\lambda)$ = molteplicità di λ come zero di $P_f(x)$

= massima potenza di $(x-\lambda)$ t.c. $(x-\lambda)^{m_a(\lambda)}$ divide $P_f(x)$

$m_a(\lambda) \in \mathbb{N} - \{0\}$

Def $m_a(\lambda)$ è detto molteplicità algebrica di λ.

λ è autovalore di $f \iff \ker(f - \lambda\, id_V) \neq 0$

Def Se λ è autovalore di f, poniamo

$$V_\lambda(f) := \ker(f - \lambda\, id_V) \subset V$$

$V_\lambda = V_\lambda(f)$ è sottospazio vettoriale di V, detto autospazio di f relativo all'autovalore λ.

$1 \leq \dim V_\lambda \leq \dim V$.

Def Il numero $m_g(\lambda) := \dim V_\lambda \geq 1$ è detto molteplicità geometrica di λ come autovalore di f.

$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \rightsquigarrow L_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Pol caratteristico

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1$$ non ha zeri in $\mathbb{R}$.

$$x^2+1 = (x-i)(x+i)$$

A non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

$$A \in M_2(\mathbb{C}) \rightsquigarrow L_A : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

$\lambda_{1,2} = \pm i$

$(\lambda_1 = i)$ $\quad (A - \lambda_1 I_2) X = 0$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$-ix + y = 0$

$\begin{cases} x = t \\ y = it \end{cases}$ $\quad t \in \mathbb{C}$

$$\boxed{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}}$$

$m_g(i) = 1 = m_a(i)$

$(\lambda_2 = -i)$ $\quad \left(A - (-i) I_2\right) X = 0$

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$ix + y = 0$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = -it \end{cases} \quad t \in \mathbb{C} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ è simile a $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

$$A = S D S^{-1}$$

$$S = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \\ \quad v_1 \quad\; v_2 \end{array}$$

$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$ è base di $\mathbb{C}^2$

$\Longrightarrow$ base diagonalizzante.

$$f(v) = \lambda v$$

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \lambda v = \lambda (\alpha v)$$

v autovett. $\Rightarrow$ αv autovett. $\forall \alpha \neq 0$

Esempio $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ è diagonalizzabile? NO

Pol. car. $P_B(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2$

non c'è base di autovettori

$\lambda = 1$ unico autovalore, $m_a(\lambda) = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$m_g(1) = 1 < m_a(1)$

$\begin{cases} y = 0 \\ x = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{C}$ $\quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ base di $V_1(B)$

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$P_B(x) = \begin{vmatrix} -5-x & 8 \\ -4 & 7-x \end{vmatrix} = (x+5)(x-7) + 32 = x^2 - 2x - 35 + 32 =$$

$$= x^2 - 2x - 3 = \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 3 \quad , \quad \lambda_2 = -1$$

$$= (x-3)(x+1) \qquad m_a(3) = 1 \qquad m_a(-1) = 1$$

$\underline{(\lambda_1 = 3)}$ $$\begin{pmatrix} -8 & 8 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$-4x + 4y = 0$$

$$-x + y = 0 \qquad \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad \boxed{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\left(\lambda_2 = -1\right): \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$-x + 2y = 0$$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\left| \begin{array}{l} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

base di $\mathbb{R}^2$
di autovettori

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \text{ è simile a } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = S D S^{-1}} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$