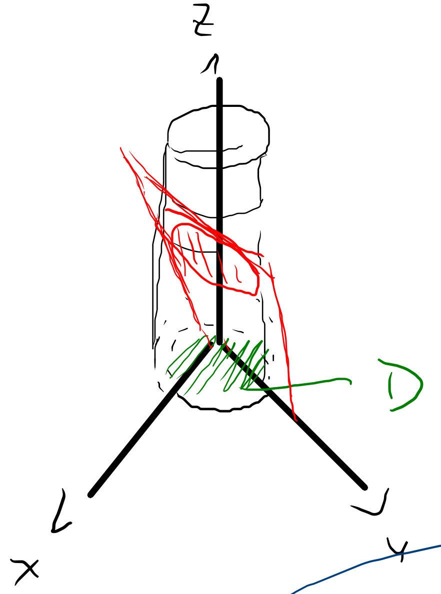
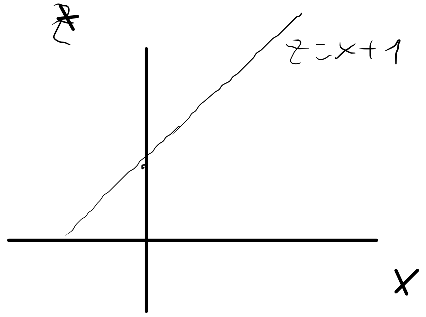
Soluzione globale di un problema di Cauchy

$\iint_S z\,d\sigma$ $\quad S \quad$ $x^2+y^2=1$ C $\quad D \; \boxed{z=0} \; x^2+y^2\le 1$ $\quad \pi \quad x-z+1=0 \quad x^2+y^2\le 1$

$z = x+1$





$\nabla z = (1,0)^T$

$S = C \cup D \cup \pi$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\cos\vartheta+1} z\,dz\right)d\vartheta$$

$$\iint_S z\,d\sigma = \iint_C z\,d\sigma + \cancel{\iint_D z\,d\sigma} + \iint_\pi z\,d\sigma = \iint_{\{(x,y)^T:\,x^2+y^2\le 1\}} (x+1)\sqrt{1+1}\,dx\,dy$$

$\iint_D z\,d\sigma = 0$

π: $(x,y,x+1)^T$

$C = \{(\cos\vartheta, \sin\vartheta, z)^T : \vartheta\in[0,2\pi)$
$0\le z\le \cos\vartheta+1\}$

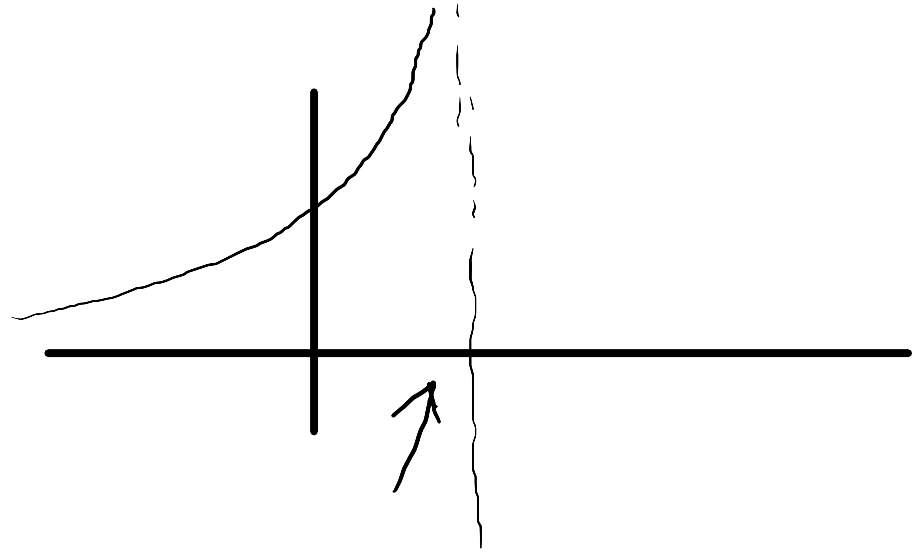
$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\nu = (\cos\vartheta, \sin\vartheta, 0)$ $\quad \|\nu\| = 1$

$$\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

$$u(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$u :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$$



$$y' = f(x,y) \qquad f(x,y) = y^2 \qquad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Definizione: sia $f : I \times J \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in I \quad y_0 \in J$

$$(CP) \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

una soluzione di (CP) si dice globale se è definita su I

$$(CP) \begin{cases} u' = \boxed{f(x,u)} \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

Alcune questioni importanti relative a (CP)

- esistenza di una soluzione — f continua
- unicità della soluzione — f Lipschitz
- dominio della soluzione (soluzione globale) — f sottolineare
- questioni di stabilità: equilibri, dinamiche caotiche [sistemi dinamici]
- dipendenza continua da condizioni iniziali e parametri
- calcolo approssimato della soluzione (numerico)

Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine lineari

$u' = f(x,u)$ $\quad f(x,y) = a(x)\cdot y + b(x)$ $\quad a, b : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad x_0 \in I \quad y_0 \in \mathbb{R} \qquad f : \underbrace{I \times \mathbb{R}}_{\uparrow} \to \mathbb{R}$$

Se $b(x) \equiv 0$ l'equazione lineare si dice omogenea

$y' = a(x)y$

soluzioni $\quad y(x) = c\cdot e^{A(x)}$ dove $A'(x) = a(x)$ $\qquad y'(x) = c\, e^{A(x)} a(x) = a(x)\, y(x)$

$y(x_0) = c\, e^{A(x_0)} \Rightarrow c = y_0\, e^{-A(x_0)}$

La soluzione di (CP) (omogeneo) è $\quad y(x) = \underline{y_0\, e^{-A(x_0)}\, e^{A(x)}}$

$$\begin{cases} y' = a(x)y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Teorema (esistenza globale e unicità della soluzione di un (CP) lineare del primo ordine)

$a, b \in C(I)$ $\quad I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo $\quad x_0 \in I$ $\quad y_0 \in \mathbb{R}$ $\quad A' = a$

Allora il problema (CP) $\begin{cases} y' = a(x)\, y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ ha un'unica soluzione $\varphi : I \to \mathbb{R}$ (e quindi globale) e si ha

$$\boxed{\varphi(x) = y_0\, e^{A(x) - A(x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{A(x) - A(t)}\, b(t)\, dt}$$

$$y_0\, e^{-A(x_0)}\, e^{A(x)}$$

$$e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}\, b(t)\, dt$$

$K(x,t) = e^{A(x) - A(t)}$ $\quad$ nucleo risolvente dell'equazione

$y' = \underbrace{a y} + b$ moltiplico per $e^{-A(x)}$

$$\underbrace{y'(x)\, e^{-A(x)} - a(x)\, y(x)\, e^{-A(x)}} = b(x)\, e^{-A(x)}$$

$$\parallel$$

$$\frac{d}{dx}\left(y\, e^{-A(x)} \right)$$

integriamo tra x_0 e x

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d}{dt}\left(y(t)\, e^{-A(t)} \right) dt = \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)}\, dt$$

$$\parallel$$

$$y(x)\, e^{-A(x)} - y(x_0)\, e^{-A(x_0)}$$

$$y(x)\, e^{-A(x)} = y(x_0)\, e^{-A(x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}\, b(t)\, dt$$

$$\boxed{y(x) = y(x_0)\, e^{A(x) - A(x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{A(x) - A(t)}\, b(t)\, dt}$$

Dimostriamo l'unicità: siano φ e ψ due soluzioni

$$\begin{cases} \varphi'(x) = a(x)\,\varphi(x) + b(x) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \psi'(x) = a(x)\,\psi(x) + b(x) \\ \psi(x_0) = y_0 \end{cases}$$

sia $y(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ allora $\begin{cases} y'(x) = \underline{a(x)\,y(x)} \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$

considero $z(x) = e^{-A(x)}\,y(x)$

si ha $\underline{z'(x)} = e^{-A(x)} \cdot (-a(x))\,y(x) + e^{-A(x)} \underbrace{y'(x)}_{= a(x)\,y(x)} = \underline{0}$ $\quad \underline{\forall x \in I}$

quindi $z(x) = \text{costante}$

però $z(x_0) = \underbrace{e^{-A(x_0)}}_{>0} \cdot y(x_0) = 0 \Rightarrow z(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = \psi(x) \quad \forall x \in I$

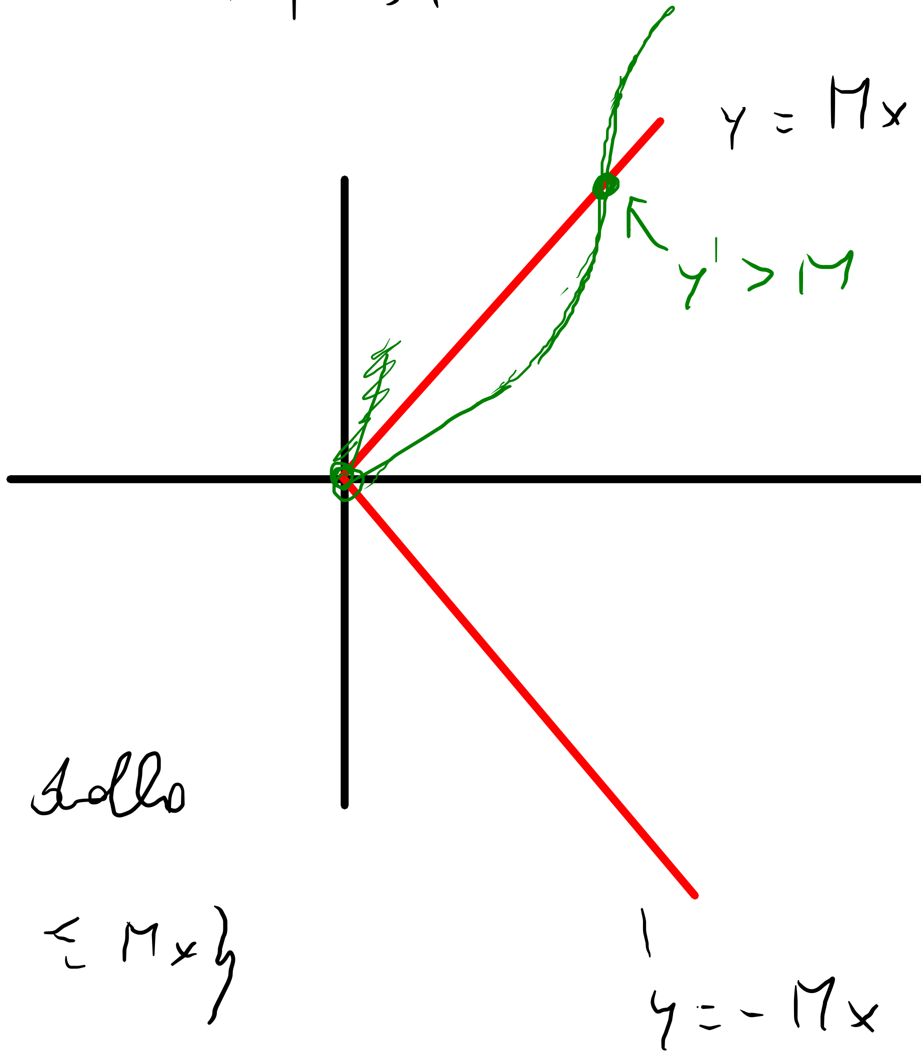
<u>Premesse</u> $\quad \boxed{y' = f(x,y)}$ sia $|f(x,y)| \le M \quad \forall (x,y)^T \in \mathbb{R}^2$

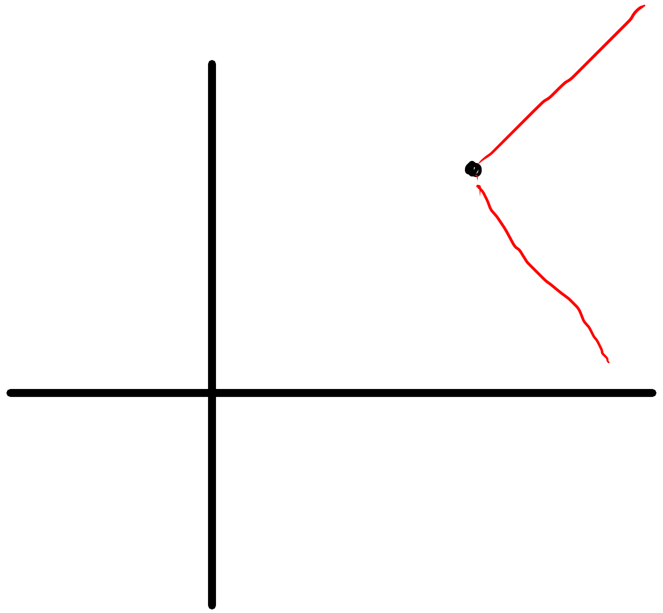
sia y soluzione con $y(0)=0$

Allora $|y'(x)| \le M$

$$|y'(x)| = |f(x, y(x))| \le M$$

Il grafico di y non può uscire dalla regione angolare $\{(x,y)^T : -Mx \le y \le Mx\}$





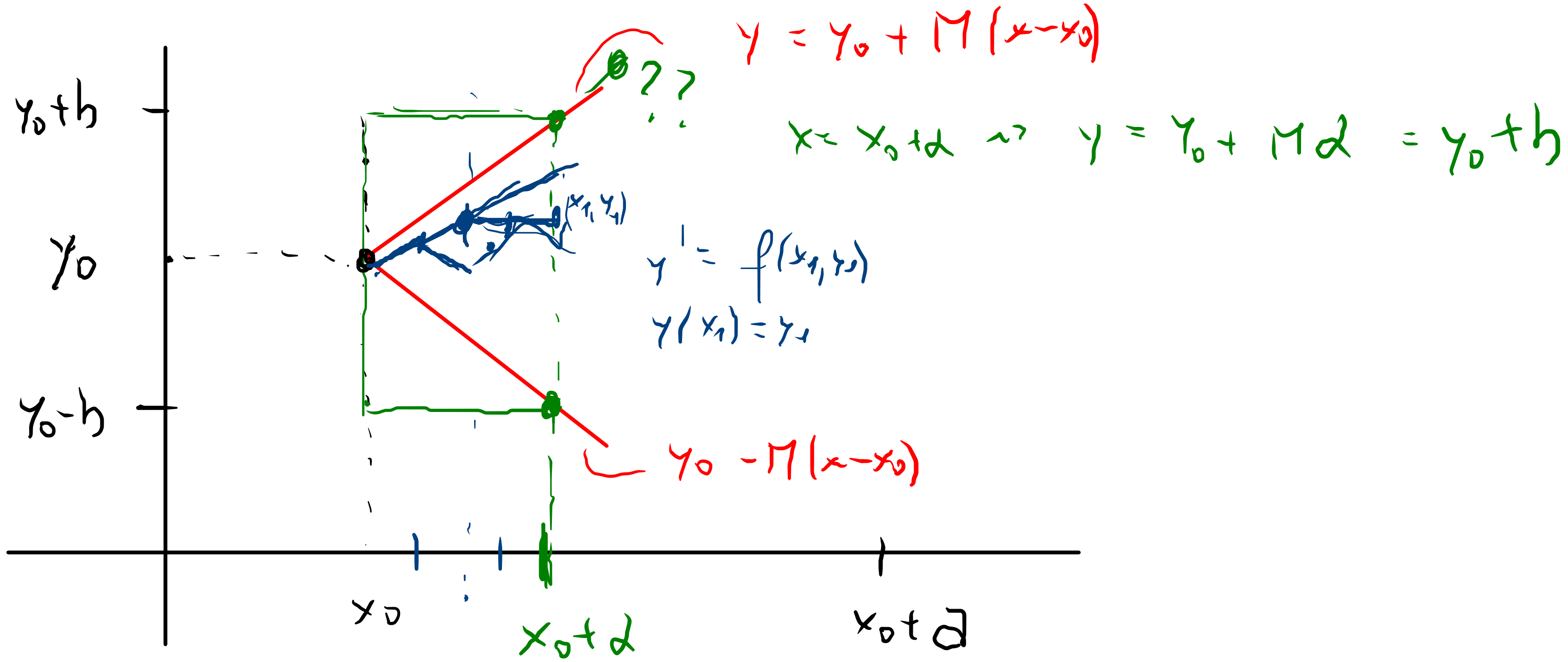
Teorema di esistenza locale di Peano

Sia $R = [x_0, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ $\quad a, b \in \mathbb{R}^+$ $\quad f : R \to \mathbb{R}$ $\quad f$ continua ;

sia $|f(x,y)| \leq M$ su R

Sia $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(x_0, y_0) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right\}$$



Allora il problema di Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$ ha almeno una soluzione definita

su $[x_0, x_0 + \alpha]$.

Funzioni Lipschitziane

$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice Lipschitziana se esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che $\forall\, x_1, x_2 \in I$

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L\,|x_2 - x_1|$$

[oss: f Lipschitz $\Rightarrow$ f unif. cont.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \delta = \frac{\varepsilon}{L} \quad$ se $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < L \cdot |x_2 - x_1| < \varepsilon$]

$f(x) = x^2$ non è Lipschitz

però è localmente Lipschitziana ($\forall$ compatto $K \subset \mathbb{R}$ la restrizione di f a K è Lipschitziana)

Una funzione derivabile con derivata limitata è Lipschitz

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |\underbrace{f'(\xi)}_{|f'(\xi)| < L}\,|x_2 - x_1|| < L\,|x_2 - x_1|$$

$f(x,y) \quad f : I \times J \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Lipschitziana nella variabile y uniformemente rispetto alla variabile x

significa che esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L\,|y_2 - y_1|$ per ogni $\underline{x \in I}$, $y_1, y_2 \in J$

Teorema di esistenza e unicità locale (Cauchy-Lipschitz / Lindelöf-Picard)

Sia $R = [x_0, x_0+a] \times [y_0-b, y_0+b]$ $\quad f : R \to \mathbb{R}$ continua su R e Lipschitziana in y uniformemente rispetto a x, con costante di Lipschitz L.

[cioè $\forall x \in [x_0, x_0+a]$, $\forall\ y_1, y_2 \in [y_0-b, y_0+b]$ $\quad |f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leq L|y_2 - y_1|$]

Sia $|f(x,y)| \leq M$ su R, $\quad \alpha = \min\{a, b/M\}$.

Allora esiste una ed una solo soluzione su $[x_0, x_0+\alpha]$ di (CP) $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Dim Passo 1) Riformulazione integrale: $\quad \underbrace{y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt}$

u è soluzione di (CP) se e solo se u è soluzione dell'equazione integrale

$$\boxed{y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt}$$

Se u è soluzione dell'eq. integrale

$$\underbrace{u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\, dt} \Rightarrow \begin{matrix} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(x_0) = y_0 \end{matrix} \Rightarrow u \text{ è soluzione di (CP)}$$

Se u è soluzione di (CP) $\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} u'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\, dt$ ....

2) Definiamo per ricorrenza una successione di funzioni $\varphi_n : [x_0, x_0+\alpha] \to \mathbb{R}$ che verificano le seguenti proprietà

$\boxed{\varphi_0(x) = y_0}$ costante   definiremo $\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_n(t))\, dt$

$(t, \varphi_n(t)) \in \mathrm{dom}\, f$

1. $|\varphi_n(x) - y_0| \leq b \quad \forall x \in [x_0, x_0+\alpha]$

2. $|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leq M \dfrac{L^n}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \forall x \in [x_0, x_0+\alpha]$

$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt$ per $n = 0$ la 1. è soddisfatta

la 2. $|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| = *$

$* = |\cancel{y_0} + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt - \cancel{y_0}| \leq \int_{x_0}^{x} \underbrace{|f(t, y_0)|}_{\leq M} dt \leq M \cdot (x-x_0) = M \cdot \dfrac{L^0}{1!}(x-x_0)^{0+1}$ OK

Passo induttivo

$$\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_n(t))\, dt$$

1. $|\varphi_n(x) - y_0| \leq b$

2. $\boxed{|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)|} \leq \left[M \frac{L^n}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right]$

Supponiamo vero fino a n; dimostriamo per $(n+1)$

1. $$|\varphi_{n+1}(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_n(t))\, dt \right| \leq M(x-x_0) \leq M\alpha \leq b \quad // \text{ OK}$$

$x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$

2. $$|\varphi_{n+2}(x) - \varphi_{n+1}(x)| = \left| \cancel{y_0} + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n+1}(t))\, dt - \cancel{y_0} - \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_n(t))\, dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} \underbrace{|f(t, \varphi_{n+1}(t)) - f(t, \varphi_n(t))|}_{\text{Lipschitz}}\, dt \leq \int_{x_0}^{x} L\, |\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)|\, dt \leq *$$

ipotesi induttivo

$$* \leq \int_{x_0}^{x} L M \frac{L^n}{(n+1)!} (t-x_0)^{n+1}\, dt = M L^{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^{x} (t-x_0)^{n+1}\, dt = M L^{n+1} \frac{1}{(n+2)!} (x-x_0)^{n+2}$$

$$\left[\frac{1}{n+2} (t-x_0)^{n+2} \right]_{x_0}^{x}$$

Passo 3: considero la serie di termine generale $h_n(x) = \varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)\right)$$

Questa serie converge uniformemente perché $|h_n(x)| \leq M \frac{L^n}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \leq \alpha^{n+1}$

e la serie numerica $\sum \left(M\alpha \frac{(L\alpha)^n}{(n+1)!}\right)$ converge;

per il M-test di Weierstrass.

$$\underline{S_n(x)} = [\cancel{\varphi_1(x)} - \varphi_0(x)] + [\cancel{\varphi_2(x)} - \cancel{\varphi_1(x)}] + [\cancel{\varphi_3(x)} - \cancel{\varphi_2(x)}] + \dots + [\cancel{\varphi_n(x)} - \cancel{\varphi_{n-1}(x)}] + [\varphi_{n+1}(x) - \cancel{\varphi_n(x)}]$$

$$= \varphi_{n+1}(x) - \varphi_0(x)$$

$$\exists \lim_{n \to +\infty} \varphi_{n+1}(x) = \boxed{\varphi(x)}$$

Sia $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$

f continua $\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(t, \varphi_n(t)) = f(t, \varphi(t))$

quindi $\lim_{n \to +\infty} \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_n(t))\, dt = \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt$

Si ha $\forall n$ $\quad \varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_n(t))\, dt$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty}$ $\quad \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt$ $\quad \varphi$ è soluzione!

Unicità: sia z soluzione; $z(x) = \underbrace{y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, z(t))\, dt}$

per induzione verifichiamo che

$$|\varphi_n(x) - z(x)| \leq M \frac{L^n}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

$n = 0$ $$|\underset{= y_0}{\varphi_0(x)} - z(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, z(t))\, dt \right| \leq M (x - x_0)$$

$n \to n+1$ $$|\varphi_{n+1}(x) - z(x)| = \left| \cancel{y_0} + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_n(t))\, dt - \cancel{y_0} - \int_{x_0}^{x} f(t, z(t))\, dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_n(t)) - f(t, z(t))|\, dt \underset{\text{Lipschitz}}{\leq} \int_{x_0}^{x} L \underbrace{|\varphi_n(t) - z(t)|}\, dt \underset{\text{ip. ind.}}{\leq} \int_{x_0}^{x} L M \frac{L^n}{(n+1)!} (t - x_0)^{n+1}\, dt$$

$$\leq M \frac{L^{n+1}}{(n+2)!} (x - x_0)^{n+2}$$ //

quindi $\lim_{n \to +\infty} |\varphi_n(x) - z(x)| = 0$ cioè $\varphi(x) = z(x)$

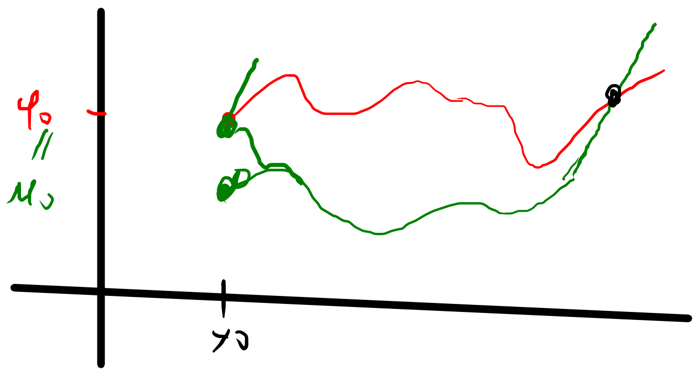
Confronto delle soluzioni di un problema di Cauchy

$f, g : I \times J \to \mathbb{R}$ $\quad \boxed{f(x,y) < g(x,y)}$ $\quad u_0, \varphi_0 \in J \quad u_0 \leq \varphi_0 \quad x_0 \in I$

(1) $\begin{cases} u' = f(x,u) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$ $\quad$ (2) $\begin{cases} \varphi' = g(x,\varphi) \\ \varphi(x_0) = \varphi_0 \end{cases}$ $\quad$ in ipotesi di Lipschitz

Siano u e φ soluzioni di (1) e (2) rispettivamente su $[x_0, x_0+\alpha]$

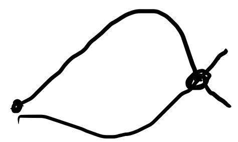
Allora $u(x) < \varphi(x) \quad \forall\, x \in]x_0, x_0+\alpha]$



Dim: caso $u_0 = \varphi_0$ allora $u'(x_0) = f(x_0, u_0) = f(x_0, \varphi_0) < g(x_0, \varphi_0) = \varphi'(x_0)$

$u'(x_0) < \varphi'(x_0)$ quindi almeno su un tratto

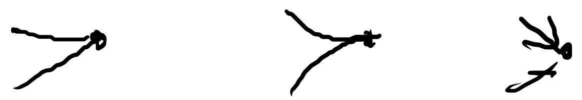
$]x_0, x_1]$ si ha $u(x) < \varphi(x)$



se $u_0 < \varphi_0$ si ha $u(x) < \varphi(x)$ su $]x_0, x_1]$

Sia $x_1 > x_0$ tale che $u(x_1) = \varphi(x_1)$; allora $u'(x_1) = f(x_1, u(x_1)) = f(x_1, \varphi(x_1)) < g(x_1, \varphi(x_1)) = \varphi'(x_1)$

$u'(x_1) < \varphi'(x_1)$ impossibile



Teorema di esistenza globale delle soluzioni

$f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e lipschitziana in y unif. risp. x; sia inoltre sottolineare

cioè esistono $a, b \in C(I)$ tali che $|f(x,y)| \le \underbrace{a(x)y + b(x)}$ $\forall\, (x,y)^T \in I \times \mathbb{R}$

Allora il (CP) $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ ha una soluzione globale (definita su I)

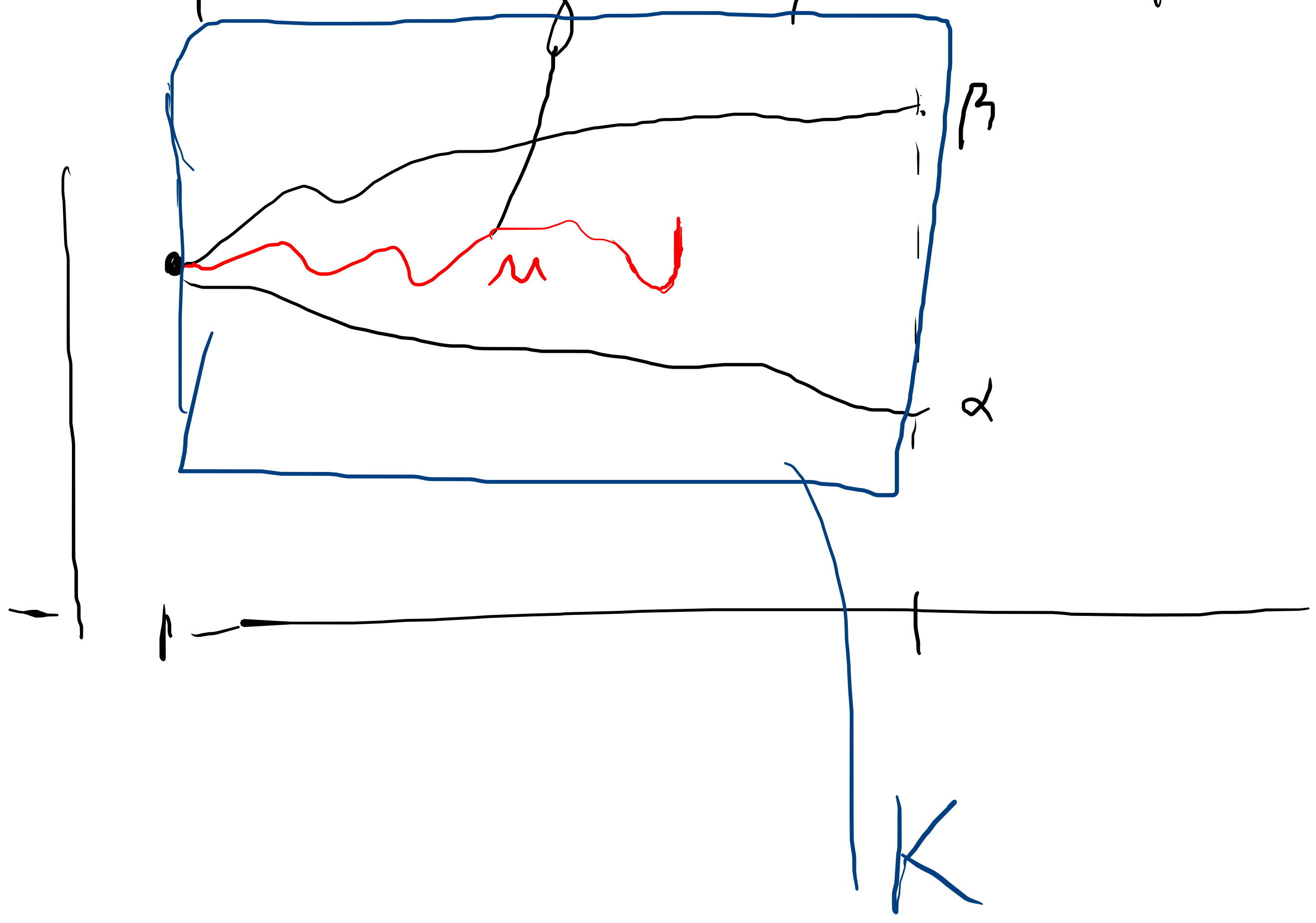
Dim $-1 - a(x)y - b(x) \underset{<}{\cancel{\le}} f(x,y) \underset{<}{\cancel{\le}} a(x)y + b(x) + 1$

Considero i problemi ① $\begin{cases} y' = -a(x)y - b(x) - 1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ lineare ② $\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) + 1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ lineare!

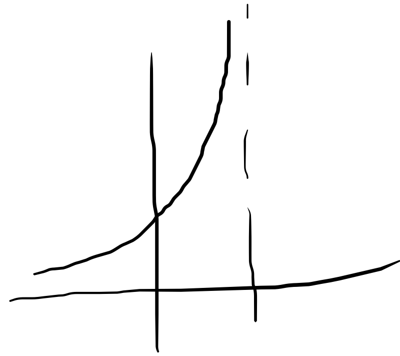
Siano α soluzione di ①, β soluzione di ②, u soluzione di (CP).

Si ha $\alpha(x) < u(x) < \beta(x)$ su $]x_0, x_0 + \alpha]$

α e β sono globali, cioè definite su I



Se u non è definita su tutto I,



u tende a $+\infty$ o a $-\infty$

impossibile perché $\alpha(x) < u(x) < \beta(x)$!

u' scoppia $\quad u'(x) = \underbrace{f(x, u(x))}_{}$

continua su un compatto K

quindi è limitata

quindi anche u è definita su I.

Esempio

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2}{x} y + x^3 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

eq. diff. ord. del primo ordine lineare $\quad y' = a(x)\, y + b(x)$

$a(x) = \dfrac{2}{x} \qquad b(x) = x^3 \qquad a, b : \,]0, +\infty[\to \mathbb{R}$

$A(1) = 0$

$A(x) = 2 \log x = \log x^2$

$$y(x) = y_0 \, e^{A(x) - A(x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{A(x) - A(t)} \, b(t) \, dt$$

$e^{A(x)} = x^2 \qquad e^{-A(x_0)} = e^0 = 1$ $\quad (x_0 = 1)$

$e^{-A(t)} = t^{-2}$

$$y(x) = 2x^2 + \int_1^x x^2 \cdot \frac{1}{t^2} t^3 \, dt = 2x^2 + x^2 \int_1^x t \, dt = 2x^2 + x^2 \cdot \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} x^4 + \frac{3}{2} x^2$$

$y(x) = \dfrac{1}{2} x^4 + \dfrac{3}{2} x^2$

$y(1) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} = 2 \; //$

$y'(x) = \underline{\underline{2x^3 + 3x}}$

$\dfrac{2}{x} y(x) + x^3 = \dfrac{2}{x} \left(\dfrac{1}{2} x^4 + \dfrac{3}{2} x^2 \right) + x^3 = x^3 + 3x + x^3 = \underline{\underline{2x^3 + 3x}}$

Equazioni a variabili separate

$y' = f(x,y)$ supponiamo che $f(x,y) = a(x)\cdot b(y)$ $\quad a: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue

$$\begin{cases} y' = a(x)\cdot b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad x_0 \in I \quad y_0 \in J$$

Cerchiamo una soluzione:

1° caso: $b(y_0) = 0$ una soluzione è $y(x) = y_0$ costante

2° caso: $b(y_0) \neq 0$ quindi per continuità sarà $b(y) \neq 0$ in un intorno di y_0,

e quindi, se $y(x)$ è soluzione, in un intorno di x_0 sarà $b(y(x)) \neq 0$;

posso allora dividere per $b(y(x))$

$$\frac{y'(\cancel{x}\,t)}{b(y(\cancel{x}\,t))} = a(\cancel{x}\,t) \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{b(y(t))}\,dt = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt = A(x) - A(x_0)$$

$z = y(t)$

$dz = y'(t)\,dt$

$$\int_{y(x_0)=y_0}^{y(x)} \frac{1}{b(z)}\,dz = H(y(x)) - H(y_0) \qquad \text{dove } H'(z) = \frac{1}{b(z)}$$

$$H(y(x)) = H(y_0) + A(x) - A(y_0)$$

$$y(x) = H^{-1}\Big(H(y_0) + A(x) - A(y_0) \Big) \qquad ?$$

H è invertibile perché $H'(z) = \dfrac{1}{b(z)}$ ha segno costante e quindi H è strett. monotona

Es: $\begin{cases} y' = \underbrace{x y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\qquad \displaystyle\int_0^x \frac{y'}{y^2}\,dt = \int_0^x t\,dt = \frac{1}{2}x^2$

$$\| $$

$$\int_1^{y(x)} \frac{1}{z^2}\,dz = -\frac{1}{y(x)} + 1 \qquad -\frac{1}{y} + 1 = \frac{1}{2}x^2 \qquad \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{2}x^2 = \frac{2-x^2}{2}$$

$$y(x) = \frac{2}{2-x^2}$$

$$y : \,]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\, \to \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y' = 2\,\dfrac{x}{y}\, e^{-y} = \overset{a(x)}{2x} \cdot \overset{b(y)}{\dfrac{1}{y e^{y}}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$b(1) = \frac{1}{e} \neq 0$

$$\int_0^x y\, e^y\, y'\, dt = \int_0^x 2t\, dt = x^2$$

$$\parallel$$

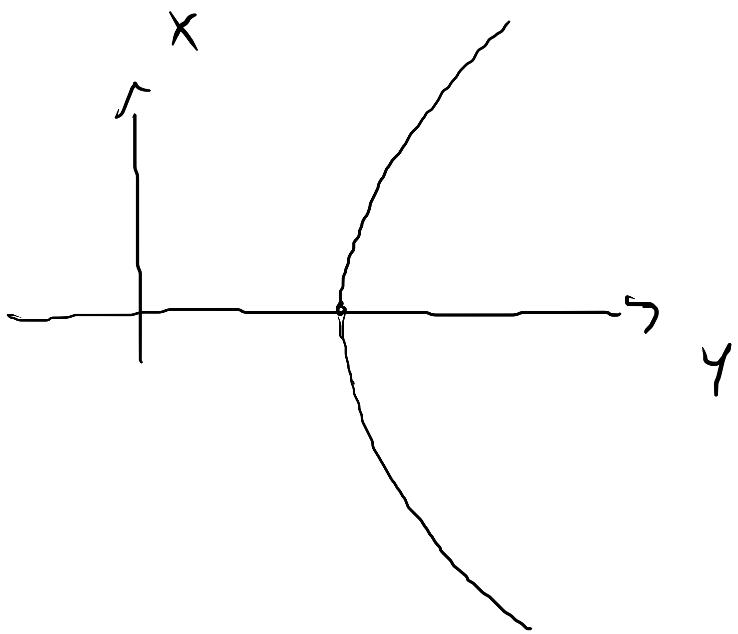
$$\int_1^{y(x)} z e^z\, dz = \left[e^z z \right]_1^{y(x)} - \int_1^{y(x)} e^z\, dz = e^{y(x)}\, y(x) - \cancel{e} - e^{y(x)} + \cancel{e} = e^y (y-1)$$

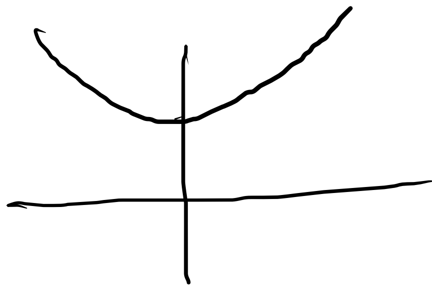
$$\left[e^z\right]_1^{y(x)}$$

$$\underbrace{e^y (y-1)}_{H(y)} = x^2 \qquad H^{-1}\,??$$

$x \geq 0 \qquad x = \sqrt{e^y (y-1)}$

$x < 0 \qquad x = -\sqrt{e^y (y-1)}$





$$\begin{cases} y' = \dfrac{4x^2 + 3y^2}{2xy} \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

eq. diff. ord. del primo ordine

$a(x)\,y + b(x)$

$$\frac{2x}{y} + \frac{3y}{2x}$$

non è lineare

non è a variabili separabili

$$2\,\frac{x}{y} + \frac{3}{2}\,\frac{y}{x}$$

idea: $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ $\qquad y(x) = x\,u(x)$

$u(2) = \dfrac{y(2)}{2} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad y'(x) = u(x) + x\,u'(x)$

$$u(x) + x\,u'(x) = 2\,\frac{1}{u(x)} + \frac{3}{2}\,u(x)$$

$$x\,u' = \frac{2}{u} + \frac{1}{2}\,u$$

$$\boxed{u' = \left(\frac{2}{u} + \frac{1}{2}u\right)\frac{1}{x}}$$

a variabili separabili

$$\boxed{\begin{cases} u' = \left(\dfrac{2}{u} + \dfrac{1}{2}u\right)\dfrac{1}{x} \\ u(2) = \dfrac{1}{2} \end{cases}}$$