Un esercizio di Analisi Matematica I

Appunti delle lezioni tenute dal Prof. A. Fonda

Università di Trieste, CdL Fisica e Matematica, a.a. 2020/2021

Esercizio. *Sia* $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile due volte tale che*

$$f(0) = 0\,, \quad f(1) = 1\,, \quad f(2) = -1\,, \quad f(3) = 0\,.$$

Dimostrare che esiste un punto $\xi \in]0,3[$ *tale che* $f''(\xi) = 0$.

Propongo diversi modi di affrontare la dimostrazione, ben cinque. Ce ne saranno anche degli altri, provate a trovarli!

<u>I modo</u>. Per Lagrange

$$\exists\, \xi_1 \in]0,1[: \quad f'(\xi_1) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 1\,,$$
$$\exists\, \xi_2 \in]2,3[: \quad f'(\xi_2) = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = 1\,.$$

Essendo $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$, per Rolle

$$\exists\, \xi \in]\xi_1, \xi_2[: \quad (f')'(\xi) = 0\,.$$

<u>II modo</u>. Per il Teorema degli zeri

$$\exists\, c \in]1,2[: \quad f(c) = 0\,.$$

Essendo $f(0) = f(c) = f(3)$, per Rolle

$$\exists\, \xi_1 \in]0,c[: \quad f'(\xi_1) = 0\,,$$
$$\exists\, \xi_2 \in]c,3[: \quad f'(\xi_2) = 0\,.$$

Essendo $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$, per Rolle

$$\exists\, \xi \in]\xi_1, \xi_2[: \quad (f')'(\xi) = 0\,.$$

<u>III modo</u>. Per Weierstrass, f ha max e min in $[0,3]$. Siccome

$$f(2) < f(0) < f(1)\,, \quad f(2) < f(3) < f(1)\,,$$

i punti di max e di min stanno in $]0,3[$ e sono distinti. Siano x_m un punto di min e x_M un punto di max. Per Fermat, $f'(x_m) = 0$ e $f'(x_M) = 0$. Per Rolle,

$$\exists\, \xi \in]x_m, x_M[: \quad (f')'(\xi) = 0\,.$$

<u>IV modo</u>. Supponiamo per assurdo che $f''(x) \neq 0$ per ogni $x \in]0,3[$. Per Darboux, abbiamo due casi:

(a) $f''(x) > 0$ per ogni $x \in]0,3[$,
(b) $f''(x) < 0$ per ogni $x \in]0,3[$.

Nel primo caso, f è strettamente convessa, in contradizione con il fatto che

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} > \frac{f(2)-f(1)}{2-1}\,.$$

Nel secondo caso, f è strettamente concava, in contradizione con il fatto che

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} < \frac{f(3)-f(2)}{3-2}\,.$$

In ogni caso, abbiamo una contraddizione.

<u>V modo</u>. La funzione non è decrescente in $[0,1]$, quindi per il corollario di Lagrange

$$\exists\, \alpha \in]0,1[: \quad f'(\alpha) > 0\,.$$

La funzione non è crescente in $[1,2]$, quindi per il corollario di Lagrange

$$\exists\, \beta \in]1,2[: \quad f'(\beta) < 0\,.$$

La funzione non è decrescente in $[2,3]$, quindi per il corollario di Lagrange

$$\exists\, \gamma \in]2,3[: \quad f'(\gamma) > 0\,.$$

Per Weierstrass, f' ristretta a $[\alpha,\gamma]$ ha max e min: sia $\xi \in [\alpha,\gamma]$ un punto di min. Per quanto visto sopra, deve essere $\xi \in]\alpha,\gamma[$. Per Fermat, $(f')'(\xi) = 0$.

<u>VI modo</u> (errato!). Per Lagrange

$$\exists\, \xi_1 \in]0,2[: \quad f'(\xi_1) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = -\frac{1}{2}\,,$$
$$\exists\, \xi_2 \in]1,3[: \quad f'(\xi_2) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = -\frac{1}{2}\,.$$

Essendo $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$, per Rolle

$$\exists\, \xi \in]\xi_1,\xi_2[: \quad (f')'(\xi) = 0\,.$$

Dove sta l'errore?