1

Si consideri l'equazione di Abraham-Lorentz

$$m\dot{v} = mt_0\ddot{v} + F_{\text{ext}} \ ,$$

che descrive il moto di una particella carica sottoposta ad una forza esterna, tenendo conto dell'emissione di onde elettromagnetiche da parte della particella stessa. La costante t_0 è positiva. Si mostri che per una generica forza esterna $F_{\text{ext}}(t) \in L^2(\mathbb{R})$ non esiste una soluzione causale dell'equazione. [*Suggerimento*: si risolva per $\dot{v}$ come funzione di F_{ext}, usando il metodo della funzione di Green, e si mostri che la soluzione causale dà luogo a un integrale genericamente divergente e dunque non è accettabile.]

2

Si consideri la trasformata di Fourier in $\mathbb{R}^2$

$$\hat{F}(k_x, k_y) = \int dx \int dy \, F(x,y) \, e^{ik_x x + ik_y y} \ .$$

(i) Mostra che per una funzione radiale $F(x,y) = F_r(\rho)$, dove $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, anche la trasformata di Fourier è una funzione radiale $\hat{F}(k_x,k_y) = \hat{F}_r(k)$, dove $k = \sqrt{k_x^2+k_y^2}$, e vale

$$\hat{F}_r(k) = 2\pi \int_0^\infty d\rho \, \rho \, J_0(\rho k) \, F_r(\rho) \ .$$

La funzione $J_0(a)$ è la funzione di Bessel del primo tipo di ordine 0, definita dall'integrale

$$J_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \, e^{ia\cos\theta} \ .$$

(ii) Calcola la trasformata di Fourier di $F(x,y) = e^{-x^2-y^2} = e^{-\rho^2}$ usando che per una funzione fattorizzata $F(x,y) = f_1(x) f_2(y)$ vale $\hat{F}(k_x,k_y) = \hat{f}_1(k_x)\hat{f}_2(k_y)$. Deduci quindi dal punto (i) che

$$\int_0^\infty d\rho \, \rho \, J_0(k\rho) e^{-\rho^2} = \frac{1}{2} e^{-k^2/4} \ .$$