Geometria 1 per Matematica e IADA

Foglio di esercizi 10

13 dicembre 2020

1) Diagonalizzare, se possibile, le seguenti matrici nei campi $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_5$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Calcolare gli autovalori e le loro molteplicità algebriche e geometriche delle matrici reali

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -5 \\ -4 & 4 & -2 \\ 10 & -3 & 8 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Determinare $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ sapendo che $(1,1,1), (1,0,-1), (1,-1,0) \in \mathbb{R}^3$ sono autovettori della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

4) Siano $A \in M_n(\mathbb{K})$, $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ e $B = SAS^{-1}$. Dimostrare che

$$B^k = SA^kS^{-1}$$

per ogni $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Supponiamo ora che $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Dimostrare che $B \in \mathrm{GL}_n(K)$ e che la formula precedente vale per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

5) Calcolare A^5 dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

(suggerimento: si usi l'esercizio precedente).