16 Dicembre

Lemma I, J intervalli, $u(x): I \to J$ $u \in C^1(I)$, $f \in C^0(J)$. Allora

$$\int f(u(x))\, u'(x)\, dx = \left(\int f(u)\, du\right)(u(x))$$

di solito si trova scritta come

$$\int f(u(x))\, u'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$

Lemma Siano $[a,b]$ e J due intervalli, $u:[a,b]\to J$ ed $f\in C^0(J)$, $u\in C^1([a,b])$.
Allora vale la formula

$$\int_a^b f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$$

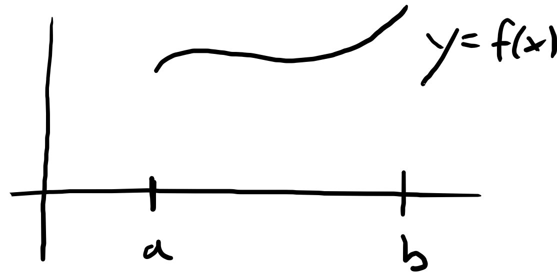
Dim

$$\int_a^b f(u(x))\,u'(x)\,dx = \left(\int f(u(x))\,u'(x)\,dx\right)\Bigg]_a^b =$$

$$= \left(\left(\int f(u)\,du\right)(u(x))\right)\Bigg]_a^b =$$

$$= \int f(u)\,du\ \Bigg]_{u(a)}^{u(b)} = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$$

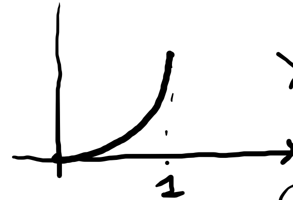
Osservazione Data $f \in C^1([a,b])$ il massimo cenno veduto che la lunghezza del suo grafico è data da



$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Esempio

$$\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\, dx =$$



$y = x^2$

$(x^2)' = 2x$

$y = 2x$

$dy = 2\, dx$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{1+y^2}\, dy$$

$1 + sh^2(t) = ch^2(t)$

$y = sh(t)$

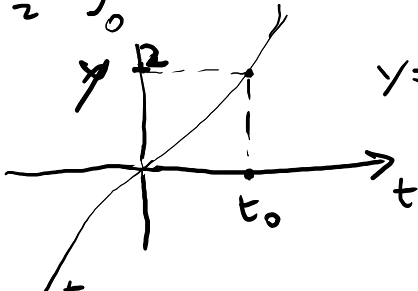
$dy = ch(t)\, dt$

$$= \frac{1}{2} \int \sqrt{1+sh^2(t)}\, ch(t)\, dt$$

$$\frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{t_0}\sqrt{1+sh^2(t)}\;ch(t)\,dt =$$

$y = sh(t)$

$1 + sh^2(t) = ch^2(t)$



$y = sh\,t$

$2 = sh\,t_0$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{t_0} ch^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{t_0}\frac{1+ch(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{t_0} dt + \frac{1}{4}\int_0^{t_0} ch(2t)\,dt$$

$$= \frac{t_0}{4} + \frac{1}{4}\left.\frac{sh(2t)}{2}\right]_0^{t_0} = \frac{t_0}{4} + \frac{1}{8}\,sh(2t_0) = \frac{t_0}{4} + \frac{1}{8}\,2\,\underbrace{sh(t_0)}_{2}\,ch(t_0)$$

$$= \frac{t_0}{4} + \frac{1}{2}\,ch(t_0) = \frac{t_0}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{1+sh^2(t_0)} = \frac{t_0}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{t_0}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \text{dove} \qquad sh(t_0) = 2$$

$$y = sh(t) \qquad t = \lg\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

$$t_0 = \lg\left(2 + \sqrt{5}\right)$$

Espansioni di Hermite $R(x) = \dfrac{P(x)}{q(x)}$ con P e q polinomi

Esempio Per opportune costanti A, B, C scrivo

$$\frac{1}{x^3-3x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

Il senso è che $x^3-3x^2+2x = x(x-1)(x-2)$

$$R(x) = \frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \qquad \cdot x$$

$$x\,R(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = A + B\frac{x}{x-1} + \frac{C\,x}{x-2}$$ calcolo per $x=0$

$$x\,R(x)\Big|_{x=0} = \frac{1}{(-1)(-2)} = \boxed{\frac{1}{2} = A}$$

$$R(x) = \frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \qquad \cdot (x-1)$$

$$(x-1)R(x) = \frac{1}{x(x-2)} = \frac{A}{x}(x-1) + B + \frac{C}{x-2}(x-1)$$

Per $x = 1$

$$(x-1)R(x)\Big|_{x=1} = -1 = B$$

$$C = (x-2)R(x)\Big|_{x=2} = \frac{1}{x(x-1)}\Big|_{x=2} = \frac{1}{2}$$

Integrale improprio. $[a,b)$ ad es $[a,+\infty)$ se $b=+\infty$. Oggi consideriamo $f \in L_{loc}[a,b)$ con segno costante, $f(x) \geq 0$ $\forall\, x \in [a,b)$.

<u>Teor</u> (Aut-aut) Sia $f \in L_{loc}([a,b))$ con $f(x) \geq 0$ $\forall\, x \in [a,b)$. Allora il seguente limite

$$\lim_{R \to b^-} \int_a^R f(x)\,dx$$

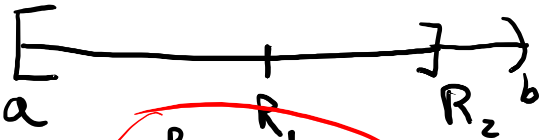
esiste, finito o $=+\infty$.

Dim La dimostrazione segue dal fatto che

$$\int_a^R f(x)\,dx \text{ è crescente in } R \Rightarrow \lim_{R\to b^-}\int_a^R f(x)\,dx$$

esiste.

Per dimostrare che $\int_a^R f(x)\,dx$ è crescente in R osserviamo che se $R_1 < R_2$



$$\int_a^{R_2} f(x)\,dx = \int_a^{R_1} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{R_1}^{R_2} f(x)\,dx}_{\geq 0} \geq \int_a^{R_1} f(x)\,dx$$

segue la tesi.

Teor (confronto) Siano $f, g \in L_{loc}([a,b))$ con $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall\, x \in [a,b)$. Allora $g \in L([a,b))$ $\Rightarrow$ $f \in L([a,b))$

Dim Per ogni $a < R < b$,

$$\int_a^R f(x)\,dx \leq \int_a^R g(x)\,dx$$

Supponiamo che $\lim_{R \to b^-} \int_a^R f(x)\,dx$ e $\lim_{R \to b^-} \int_a^R g(x)\,dx$ esistono in $[0,+\infty]$ e che in particolare $\lim_{R \to b^-} \int_a^R g(x)\,dx \in [0,+\infty)$

Per il teor del confronto tra i limiti

$$\lim_{R\to b^-}\int_a^R f(x)\,dx \leq \lim_{R\to b^-}\int_a^R g(x)\,dx < +\infty$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{R\to b^-}\int_a^R f(x)\,dx < +\infty \Rightarrow f \in L([a,b))$$

<u>Osservazione</u> Se $f, g \in L_{loc}([a,b))$ $0 \leq f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b)$

e se $f \notin L[a,b) \Rightarrow g \notin L[a,b)$

Esempi $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^4}$ è sommabile?

$\frac{x^3}{1+x^4} \in C^0(\mathbb{R}) \subset L_{loc}(\mathbb{R}) \Longrightarrow \frac{x^3}{1+x^4} \in L_{loc}([0,+\infty))$

Notare che $\frac{x^3}{1+x^4} \approx \frac{1}{x}$ per $x >> 1$. Questo ci

consentirà di concludere che $\frac{x^3}{1+x^4} \notin L[0,+\infty)$

$\Longleftrightarrow \frac{x^3}{1+x^4} \notin L[a,+\infty) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$$\frac{x^3}{1+x^4} = \frac{\cancel{x^3}}{x^4(1+x^{-4})} = \frac{1}{x}\ \frac{1}{1+x^{-4}} \geq \frac{1}{x}\ \frac{1}{1+1}$$

Per $1 \leq x$ $\quad x^{-4} \leq 1$

In $[1,+\infty)$ $\quad \frac{x^3}{1+x^4} \geq \frac{1}{2}\ \frac{1}{x} > 0$

Sappiamo $\frac{1}{x} \notin L[1,+\infty) \iff \frac{1}{2}\ \frac{1}{x} \notin L[1,+\infty)$

$\Rightarrow \frac{x^3}{1+x^4} \notin L[1,+\infty) \Rightarrow \frac{x^3}{1+x^4} \notin L[0,+\infty)$

Esempio $\quad \dfrac{1}{1+x^4+x^6} \in L[0,+\infty)$

$\iff \dfrac{1}{1+x^4+x^6} \in L[1,+\infty)$

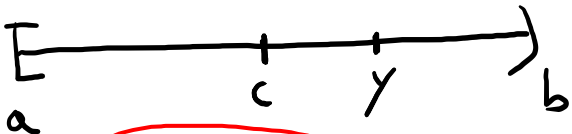
per $x \geq 1$ $\quad 0 < \dfrac{1}{1+x^4+x^6} \leq \dfrac{1}{x^6}$

$6 > 1 \implies x^{-6} \in L[1,+\infty) \implies \dfrac{1}{1+x^4+x^6} \in L[1,+\infty)$

Esercizio Sia $f \in L_{loc}[a,b)$ e sia $c \in (a,b)$

Allora $f \in L[a,b) \iff f \in L[c,b)$

Posso



considerare nel limite

$y > c$

$$\lim_{y \to b^-} \int_a^y f(x)\,dx = \lim_{y \to b^-} \left[\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^y f(x)\,dx \right]$$

$$= \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{y \to b^-} \int_c^y f(x)\,dx$$

Esercizio Se f è integrabile per Darboux in $[a,b]$ allora è integrabile in senso improprio in $[a,b)$ e i due integrali coincidono.

Dim Ricordiamoci del teorema il quale dice che se f è integrabile per Darboux in $[a,b]$ allora

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{su} \quad x\in[a,b] \text{ è } F\in C^0([a,b])$$

In particolare questo implica che $F(x)$ è continua in b, cioè

$$\lim_{x \to b^-} F(x) = F(b) \iff$$

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$ (= integrale di Darboux di $f(t)$ in $[a,b]$)

Il limite $\Uparrow$ è l'integrale improprio di f in $[a,b)$.