ESERCIZI DI GEOMETRIA, FOGLIO 9

Trieste, 14 dicembre 2020

1. Determinare per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la matrice reale A è diagonalizzabile, e per quali $c \in \mathbb{R}$ lo è la matrice C :
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Sia A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
su un campo K. Determinare se A è diagonalizzabile, risp. triangolarizzabile, sui campi $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5$.

3. Dimostrare che la matrice reale
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
è diagonalizzabile, poi trovare una matrice S tale $S^{-1}AS$ sia diagonale. S è unica?

4. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{leq2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 2, e sia $T : V \to V$ definito ponendo $(T(p))(t) = p(t+1)$. Scrivere la matrice di T rispetto alla base $\mathcal{B} = (1, t, t^2 - 2/3)$. Trovare gli autovalori e gli autospazi di T, e verificare che T non è diagonalizzabile.