$f : V \longrightarrow V$, $f \in \mathrm{End}(V)$ $\rightsquigarrow$ $p_f(x) \in \mathbb{K}[x]_n$ $n = \dim V$

$\mathbb{K} \ni \lambda_1, \dots, \lambda_r$ zeri distinti di $p_f(x)$

$\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso (teorema fondamentale dell'algebra)

Def Un campo $\mathbb{K}$ è detto algebricamente chiuso se ogni polinomio $p \in \mathbb{K}[x]$, $\deg p \geq 1$, ammette almeno uno zero in $\mathbb{K}$.

Fatto $\forall$ $\mathbb{K}$ campo non alg. chiuso $\exists$ $\hat{\mathbb{K}}$ campo algebricamente chiuso che contiene $\mathbb{K}$ come sottocampo.

Fatto Se $\mathbb{K}$ è alg. chiuso allora $\forall\, p \in \mathbb{K}[x]$, $\deg p \geq 1$, è prodotto di fattori di 1° grado

$$p = a\,(x-\lambda_1)^{e_1} \cdots (x-\lambda_r)^{e_r} \quad , \; e_i \in \mathbb{N} - \{0\}$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ a due a due distinti

$a \in \mathbb{K} - \{0\}$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sono gli zeri di p

e_i è detto molteplicità di λ_i come zero di p

λ autovalore di $f : V \to V$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{m_a(\lambda) \in \mathbb{N} - \{0\}}$

 $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; \cap$

 $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; \mathrm{End}(V)$

molteplicità di λ come zero di $p_f(x)$

$(x-\lambda)^{m_a(\lambda)}$ divide $p_f(x)$

λ autovalore di f $\rightsquigarrow$ ma $(x-\lambda)^{m_a(\lambda)+1}$ non divide $p_f(x)$

$\mathrm{Aut}(\lambda) = \underline{V_\lambda} = \mathrm{Ker}\left(f - \lambda \, \mathrm{id}_V\right) \subset V$ sottosp. vett.

autospazio di f relativo a λ.

$\underline{m_g(\lambda) = \dim V_\lambda} \geq 1$

Teorema Sia $f \in \operatorname{End} V$, $\lambda \in \mathbb{K}$ autovalore di f. Allora

$$\boxed{1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)}$$

Dim $V_\lambda(f) = \ker(f - \lambda\, id_V)$ $\quad m_g(\lambda) = \dim V_\lambda(f)$

Sia $(v_1, \dots, v_k)$ base di $V_\lambda(f)$, $k = m_g(\lambda)$

$\rightsquigarrow \exists\ v_{k+1}, \dots, v_n \in V$ t.c. $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ base di V

$$A = M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}}(f) = M_{\mathcal{V}}(f) \qquad f(v_i) = \lambda v_i, \quad i = 1, \dots, k$$

$$f(v_1) = \lambda v_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathcal{V}}, \quad f(v_2) = \lambda v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathcal{V}}, \quad \dots \quad f(v_k) = \lambda v_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\underbrace{\begin{matrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & & \vdots \\ \vdots & 0 & \sim & 0 \\ \vdots & \vdots & & \lambda \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{matrix}}_{k} \quad \boxed{\phantom{\begin{matrix} X & X \\ X & X \\ X & X \\ X & X \end{matrix}}} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_k & B \\ \hline O & C \end{array} \right)$$

$$P_f(x) = P_A(x) = \det \left(\begin{array}{c|c} (\lambda - x) I_k & B \\ \hline O & C - x I_{n-k} \end{array} \right) = \det\big((\lambda - x) I_n\big) \cdot |C - x I_{n-k}|$$

$$\Vert$$

$$|A - x I_n|$$

$$\boxed{p_f(x) = (\lambda - x)^k \cdot \underline{p_c(x)}} \implies \boxed{k \leq m_a(\lambda)}$$

$$k = m_g(\lambda)$$

Teorema Sia $f \in \mathrm{End}\, V$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ autovalori a due a due distinti di f e sia $v_i \in V - \{0\}$ un autovettore di f relativo a λ_i, $\forall i = 1, \dots, r$.

Allora i vettori $v_1, \dots, v_r$ sono linearmente indipendenti.

Dim Sia $\boxed{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = 0}$ una comb. lineare che dà luogo al vettore nullo, $\alpha_i \in \mathbb{K}$.

$$f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r) = f(0) = 0$$

$$\parallel$$

$$\alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_r f(v_r) = 0$$

$$\parallel$$

$$\rightarrow \boxed{\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_r \lambda_r v_r = 0.}$$

$f(v_i) = \lambda_i v_i$

Vogliamo far vedere che $\alpha_i = 0 \ \forall i$

$\boxed{\text{Induzione su } r}$

Base dell'induzione $r = 1$

$$\alpha_1 v_1 = 0 \implies \alpha_1 = 0 \quad \text{perché } v_1 \neq 0$$

Supponiamo che $r > 1$, e che l'enunciato sia vero per k vettori, $k < r$

$$\alpha_1 \overbrace{(\lambda_1 - \lambda_r)}^{\neq 0} v_1 + \cdots + \alpha_{r-1} \overbrace{(\lambda_{r-1} - \lambda_r)}^{\neq 0} v_{r-1} = 0$$

$$\lambda_i - \lambda_r \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, r-1$$

Per l'ipotesi induttiva $v_1, \dots, v_{r-1}$ sono lin. indip.

$$\implies \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, r-1 \implies \alpha_r v_r = 0 \implies \alpha_r = 0$$

$(v_r \neq 0)$

<u>Corollario</u> Se $f \in \mathrm{End}(V)$, siano $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ autovalori distinti di f e

siano $\mathcal{V}^{(i)} = \left(v_1^{(i)}, \dots, v_{m_i}^{(i)} \right)$ base di V_{λ_i}, $i = 1, \dots, r$, $m_i = m_g(\lambda_i)$.

Allora $\left(v_1^{(1)}, \dots, v_{m_1}^{(1)}, \dots, v_1^{(r)}, \dots, v_{m_r}^{(r)} \right)$ sono vettori lin. indip.

<u>Dim</u> $\sum_{i,j} a_j^{(i)} v_j^{(i)} = 0$, $a_j^{(i)} \in \mathbb{K}$

$$\sum_{i=1}^{r} \underbrace{\sum_{j=1}^{m_i} a_j^{(i)} v_j^{(i)}}_{u^{(i)}} = 0 \qquad u^{(i)} = \sum_{j=1}^{m_i} a_j^{(i)} v_j^{(i)} \in V_{\lambda_i}$$

$$= 0 \implies a_j^{(i)} = 0 \quad \forall i, j$$

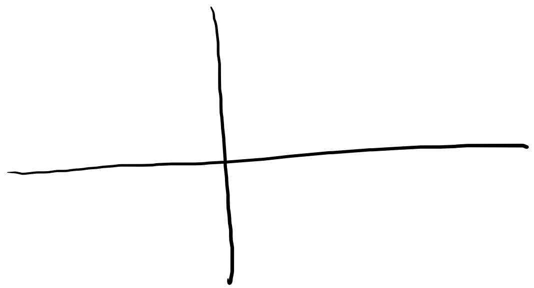
$$\Uparrow$$

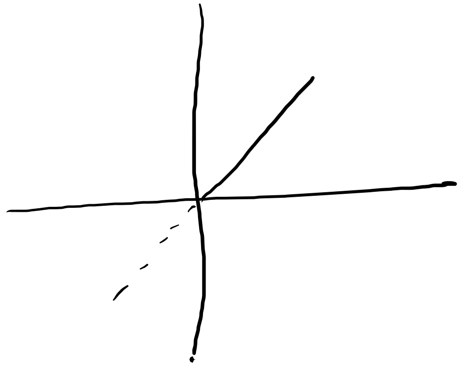
$$\sum_{i=1}^{r} u^{(i)} = 0 \qquad \boxed{u^{(1)} + \dots + u^{(r)} = 0} \implies u^{(i)} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, r$$

Corollario $f \in End(V)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ autovalori distinti di $f \Longrightarrow$

$$V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r} \subset V$$

è somma diretta





Corollario $f \in \operatorname{End} V$ è diagonalizzabile $\iff$ detti $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ i suoi autovalori distinti, si ha

$$\boxed{V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r} = V}$$

$$\iff \sum_{i=1}^{r} m_g(\lambda_i) = \dim V \iff m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i) \ \forall i$$

e $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} m_a(\lambda_i) = n = \dim V$.

$\iff$ $P_f(x)$ è prodotto di fattori di 1° grado e

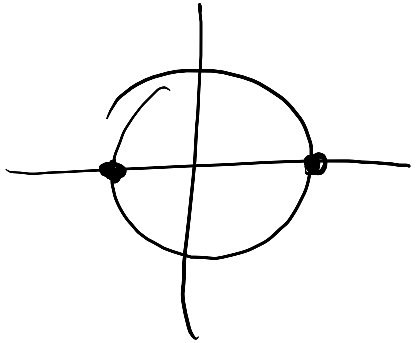
$$m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i) \quad \forall i.$$

Caso speciale: $P_f(X)$ è prodotto di fattori di 1° grado e

$$m_a(\lambda_i) = 1 \quad \forall i \quad (\text{zeri semplici})$$

$\Longrightarrow$ f diagonalizzabile

Es. $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad \theta \in \mathbb{R}$



$\theta = 2k\pi \qquad \underline{R_{2k\pi} = I_2} \qquad k \in \mathbb{Z}.$

$$P_{R_\theta}(x) = \begin{vmatrix} \cos\theta - x & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - x \end{vmatrix} = (\cos\theta - x)^2 + \sin^2\theta =$$

$$= \underline{\cos^2\theta} - 2\cos\theta\, x + x^2 + \underline{\sin^2\theta} = x^2 - 2\cos\theta\, x + 1$$

$$\lambda_{1,2} = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} = \begin{cases} -1 & \text{se } \theta = (2k+1)\pi, \; k \in \mathbb{Z} \\ \underline{\cos\theta \pm i \sin\theta} \in \mathbb{C} \end{cases}$$

$$\theta = (2k+1)\pi \qquad R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$$

$\theta = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ ✓

$\lambda_1 = \cos\theta + i\sin\theta$

$\underline{\theta \neq k\pi, \; k \in \mathbb{Z}}$

$\lambda_{1,2} = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ $\quad \boxed{\sin\theta \neq 0}$

$(R_\theta - \lambda_1 I_2) X = 0$

$$\begin{pmatrix} -i\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -i\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-ix - y = 0$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = \cos\theta - i\sin\theta$

$$\begin{pmatrix} i\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & i\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$ix - y = 0 \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

(v_1, v_2) base diag. ✓ per f di $\mathbb{C}^2$.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}{}^t\overline{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\boxed{R_\theta = S \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} S^{-1}} \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$