Esercizi Algebra 1 - 16/12/20

(annaspagnolo97@gmail.com, francesco.digiorgio@studenti.units.it)

Esercizio 1
Si provi che se I è un ideale di un anello R con identità 1_R e $1_R \in I$, allora $I = R$. Si provi che se I è un ideale di un anello R con identità e contiene un elemento invertibile di R, allora $I = R$.

Esercizio 2
Si scrivano tutti gli ideali degli anelli $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_7$ e $\mathbb{Z}_8$.

Esercizio 3
Si consideri l'anello $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con le seguenti operazioni di somma e moltiplicazione

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \circ (c, d) = (ac, ad + bc)$$

Si provi che $\{0\} \times \mathbb{Z}$ è un suo ideale primo.

Esercizio 4
Siano R un anello, F un campo e $\varphi \colon F \to R$ un omomorfismo di anelli. Si provi che allora o φ è iniettivo oppure $\varphi(a) = 0$ per ogni $a \in F$.

Esercizio 5
Si consideri l'anello commutativo unitario $R = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_8$.

1. R è un dominio di integrità?
2. Dimostrare che $\{0\} \times \mathbb{Z}_8$ è un ideale massimale di R.
3. Dimostrare che l'ideale $\mathbb{R} \times \{\bar{0}\}$ di R non è primo.

Esercizio 6
Determinare i generatori degli ideali $I = 6\mathbb{Z} \cap 8\mathbb{Z}$ e $J = 6\mathbb{Z} + 8\mathbb{Z}$.