domenica 13 dicembre 2020 15:24

FOGLIO 8

① CALCOLARE $\det(A)$, con $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 27 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 27 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 27 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} + \underbrace{(-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 27 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix}}_{=0} + \dots =$$

SVILUPPO RISPETTO ALLA 1ª RIGA

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 27 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = -(-1)^{3+2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 27 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} + 0 = -\begin{vmatrix} 0 & 27 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} =$$

SVILUPPO RISPETTO ALLA 1ª COLONNA

$$= -(-1)^{1+2} \cdot 27 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} + 0 = 27 \cdot (0\sqrt{2} - 1 \cdot 1) = -27\sqrt{2}$$

② $\forall n \geq 1$ calcolare $\det A_n$, con $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

- VEDIAMO CASI SEMPLICI.

$n=1 \rightarrow |1| = 1$. $n=2 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$.

$n=3 \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{SVILUPPO 1ª COLONNA}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \det(A_2) = 1$.

$\rightsquigarrow$ SUPPOSIZIONE: $\forall n \ \det(A_n) = 1$.

$\rightarrow$ INDUZIONE.

$n=1 \rightsquigarrow \det A_1 = 1$ ✓.

VALIDO PER $n-1 \Rightarrow$ VALIDO PER n?

OSSERVIAMO A_{n-1}. STERILIZZIAMO ORIZZONTALMENTE COME PER A_3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \\ \vdots \\ R_{n-1} \to R_{n-1} - R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & & \\ \vdots & A_{n-2} & \\ 0 & & \end{vmatrix} =$$

$$= \det(A_{n-2}) = 1$$ ✓✓✓.

SVILUPPO 1ª COLONNA — CASSO INDUTTIVO

③ CALCOLARE $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \overset{\forall j \ R_j \to R_j - x_1 R_{j-1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

RACCOGLIAMO IL FATTORE COMUNE DI OGNI RIGA

COSTANO TUTTI I $(x_j - x_1)$ FUORI

$$= \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1) \cdot \prod_{k=3}^{n} (x_k - x_2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_3 & x_4 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_3^{n-3} & x_4^{n-3} & \cdots & x_n^{n-3} \end{vmatrix} =$$

(RIPETIAMO $n-3$ VOLTE) $= \prod_{i<j} (x_j - x_i)$ ✓✓✓.

④ CALCOLARE $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$.

QUANDO È INVERTIBILE?

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{SVILUPPO 1ª RIGA}}{=} \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{RACCOGLI 2 DALLA 3ª RIGA}}{=} \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & -1-k & 2 \\ 0 & -2k & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ -2k & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 - 3k + 4k = 3 + k \rightarrow \left[\text{INV.} \iff k \neq -3. \right]$$

⑤ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_A \in \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_B$ SONO SIMILI? PERCHÉ?

La matrice, in questo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(A e B sono le matrici associate alla stessa applicazione lineare:

$f: e_1 \mapsto 2e_1$, $e_2 \mapsto 3e_2$, $e_3 \mapsto 2e_3$ $\rightsquigarrow$ $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, $\mathcal{B}' = \{e_1, e_3, e_2\}$ $\longrightarrow$ $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$, $B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$.)

⑥ Dati $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ con $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$, dimostrare che

$\exists! \ p \in \mathbb{R}[x]_{\leq n-1}$ t.c. $\forall i \ p(x_i) = y_i$.

$p = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$ t.c. $\forall i \ p(x_i) = y_i$.

$\rightsquigarrow$ SISTEMA IN $a_0, \dots, a_{n-1}$:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_1^{n-1} = y_1 \\ \dots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_{n-1} x_n^{n-1} = y_n \end{cases}$$

MATRICE DEI COEFF.: $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ TRASPOSTA DELLA MATRICE DI VANDERMONDE (ES ⑤)

$\Rightarrow$ MATRICE DEI COEFF. INVERTIBILE $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ✓✓✓.