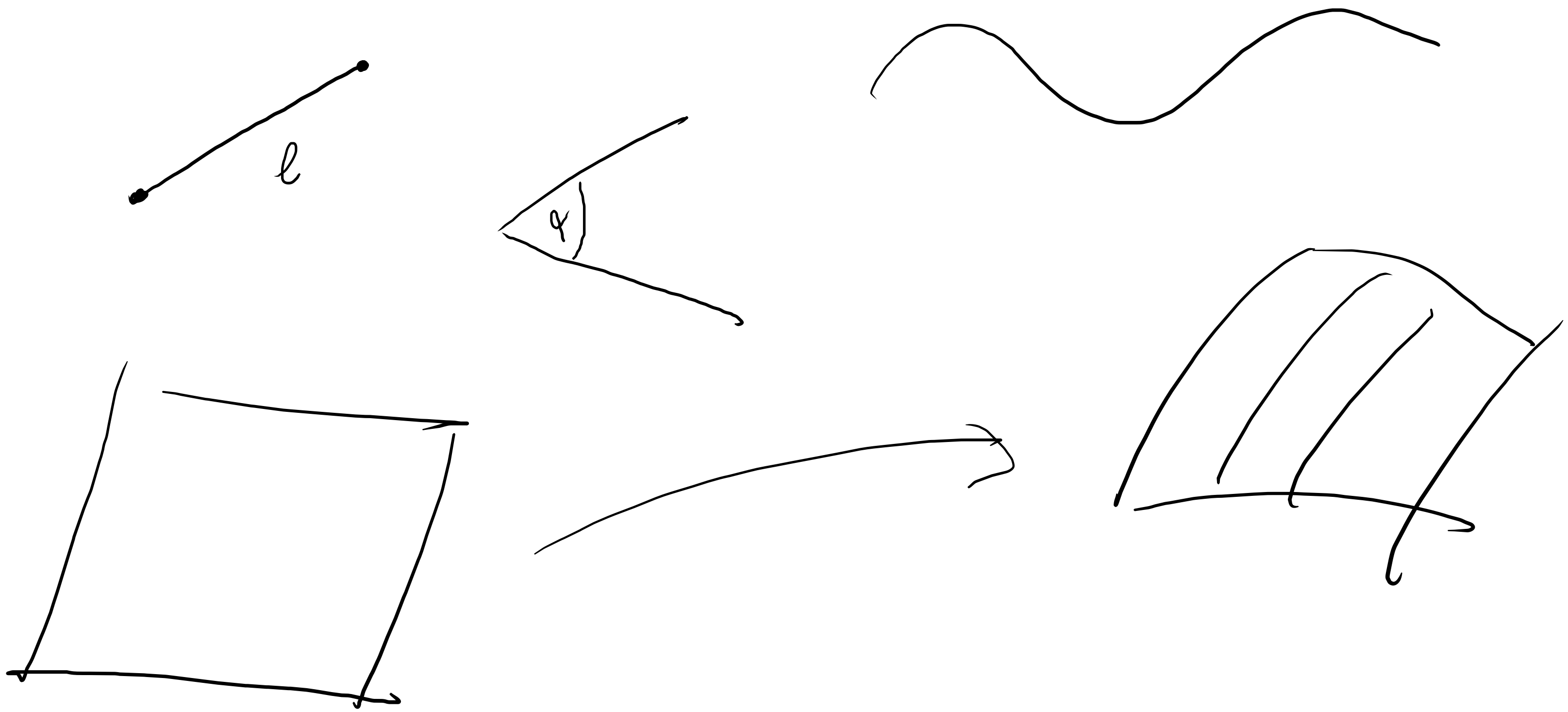
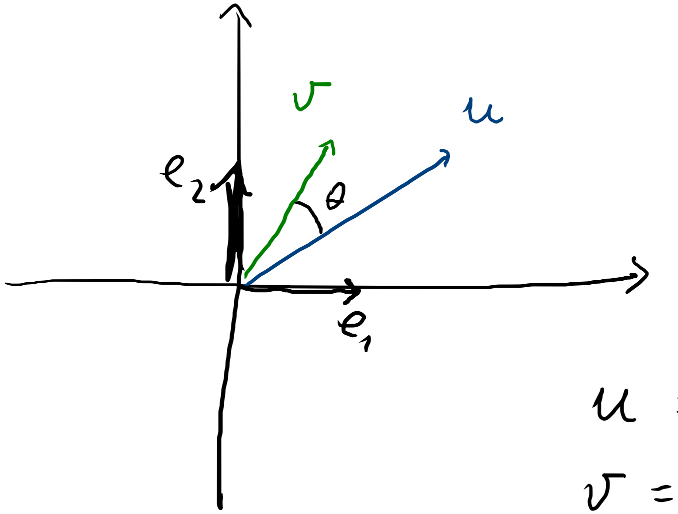
Geometria Euclidea



Prodotto scalare nella geometria Euclidea classica



$$\underline{u \cdot v = \langle u, v \rangle} := \|u\| \cdot \|v\| \cos\theta$$

lunghezza (o norma) di u

$u = x_1 e_1 + x_2 e_2$

$v = y_1 e_1 + y_2 e_2$

$$\boxed{u \cdot v = x_1 y_1 + x_2 y_2}$$

$$b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$b((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = b((y_1, y_2), (x_1, x_2))$$

$$b((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$b((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = x_1^2 + x_2^2 \geq 0$$

V $\mathbb{K}$ - spazio vettoriale

Def Una funzione $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ è detta funzione bilineare

se:

1) $b(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 b(v_1, w) + \alpha_2 b(v_2, w)$

2) $b(v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) = \beta_1 b(v, w_1) + \beta_2 b(v, w_2)$

$\forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{K}, \quad \forall v_1, v_2, v, w_1, w_2, w \in V.$

<u>Es.</u> $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$

$$b(X, Y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = {}^tX \cdot Y$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$b_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$0 \leq p \leq n$

$$b(X, Y) = x_1 y_1 + \dots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \dots - x_n y_n$$

Se $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ è bilineare

$$b(0_V, w) = b(v, 0_V) = 0_{\mathbb{K}} \quad \forall v, w \in V.$$

Def Sia $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ forma bilineare. Allora b è detta

1) simmetrica se $b(v, w) = b(w, v) \quad \forall v, w \in V$

2) antisimmetrica se $b(v, w) = - b(w, v) \quad \forall v, w \in V.$
(o alternante)

Def $b : V \times V \to \mathbb{K}$ bilineare è detta degenere se

$\exists\ v \in V - \{0\}$ t.c. $b(v, w) = 0\quad \forall\, w \in V$.

Es. $O : V \times V \to \mathbb{K}$ forma nulla

$O(v, w) = 0\quad \forall\, v, w \in V$ (degenere)

$c : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ degenere (non nulla)

$c((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1$

$c((0,1), (y_1, y_2)) = 0\quad \forall\, (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

<u>non degenere</u>

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$b(X, Y) = {}^tX \, Y$$

$X \in \mathbb{R}^n$ t.c. $b(X, Y) = 0 \quad \forall \, Y \in \mathbb{R}^n$

$$b(X, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-esimo vettore} \\ \text{della base canonica}}}{e_i}) = x_i = 0 \quad \forall i \implies X = 0$$

$\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$

Def Sia V sp. vett. $/\mathbb{R}$, $b : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica.
Diciamo che b è:

1) definita positiva se $b(v,v) > 0 \quad \forall\, v \in V - \{0\}$
2) semi definita positiva se $b(v,v) \geq 0 \quad \forall\, v \in V$
3) definita negativa se $b(v,v) < 0 \quad \forall\, v \in V - \{0\}$
4) semi definita negativa se $b(v,v) \leq 0 \quad \forall\, v \in V$.
5) indefinita se $\exists\, v, w \in V$ t.c. $b(v,v) > 0$ e $b(w,w) < 0$

Esempi $\quad n \geq 1$

1) $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ prodotto scalare canonico $\quad$ | definita positiva

$b(X, Y) = {}^t X\, Y$

2) $c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad (n \geq 2)$ $\quad$ | semidefinita positiva

$(X, Y) \mapsto x_1 y_1$

$c(X, X) = x_1^2 \geq 0$

3) $-b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad$ | definita negativa

$\overset{\shortparallel}{b_0}$ $(p = 0)$ $\quad -b(X, Y) = -{}^t X\, Y$

4) $-c$ semidefinita negativa $\quad\quad b_p(e_1, e_1) = 1 > 0$

5) $b_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad (n \geq 2)$ $\quad b_p(X, Y) = x_1 y_1 + \dots x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \dots - x_n y_n$

$\boxed{1 \leq p \leq n-1}$ $\quad\quad b_p(e_n, e_n) = -1 < 0$

OSS. Se $b : V \times V \to \mathbb{R}$ è definita (positiva o negativa) allora è non degenere

Infatti supponiamo per assurdo che sia degenere: $\exists\, v \in V - \{0\}$ t.c. $b(v, w) = 0 \quad \forall w \in V$

Ponendo $w = v \quad b(v,v) = 0$

ma $b(v,v) > 0$ (se def. > 0)

oppure $b(v,v) < 0$ (se def. < 0)

(contraddizione)

Def Una forma bilineare simmetrica definita positiva su V spazio vett. reale si chiama **prodotto scalare**.

Def Uno spazio vett. reale V munito di un prodotto scalare $b: V \times V \to \mathbb{R}$ è detto **spazio vettoriale Euclideo**.

(V, b)

Notazione Se b è prodotto scalare su V, si usa la notazione

$$b(v, w) =: \boxed{\langle v, w \rangle} = (v, w)$$

(notazione di scarso uso)

$(V, \langle , \rangle)$ spazio vett. Euclideo (V è sp. vett. reale)

$\langle v, v \rangle > 0 \quad \forall v \neq 0$

$\langle 0_V, 0_V \rangle = 0$

<u>Def</u> V sp. vett. Euclideo, poniamo

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} \geq 0 \quad , \forall v \in V.$$

Il numero $\|v\|$ è detto <u>norma</u> (o lunghezza) di v.

<u>OSS.</u> $\|v\| = 0 \iff v = 0_V$ altrimenti <u>$\|v\| > 0$</u> $\forall v \in V - \{0\}$

Teorema (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Sia V spazio vett. Euclideo.

Allora
$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\| \quad \forall\, v, w \in V.$$

Inoltre vale l'uguaglianza $\Longleftrightarrow$ v e w sono linearmente dipend.

Dim 1) Se $w = 0_V$ allora è banale (e vale $=$)

2) Supponiamo $w \neq 0_V$. Poniamo $\boxed{\alpha = -\dfrac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}} = -\dfrac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \|v + \alpha w\|^2 = \langle v + \alpha w, v + \alpha w\rangle = \langle v + \alpha w, v\rangle + \alpha\langle v + \alpha w, w\rangle =$$
$$= \langle v, v\rangle + \alpha\langle w, v\rangle + \alpha\left(\langle v, w\rangle + \alpha\langle w, w\rangle\right) = \|v\|^2 + 2\alpha\langle v, w\rangle + \alpha^2\|w\|^2$$

$(\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle)$

$$0 \leq \|v + \alpha w\|^2 = \|v\|^2 + 2\alpha \langle v, w\rangle + \alpha^2 \|w\|^2 =$$

$$= \|v\|^2 - \frac{2\langle v, w\rangle^2}{\|w\|^2} + \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|w\|^2} = \|v\|^2 - \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|w\|^2}$$

$$\alpha = -\frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}$$

$$\langle v, w\rangle^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2$$

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \, \|w\| \qquad \square$$

II parte Vale $=$ $\iff \|v + \alpha w\|^2 = 0$

$\Longrightarrow v + \alpha w = 0 \implies$ <u>v, w lin. dip.</u>

Ora supponiamo v, w lin. dip. $\Rightarrow$ $v = \lambda w$ per un certo $\lambda \in \mathbb{R}$
e $w \neq 0$

$$|\langle v, w\rangle| = |\langle \lambda w, w\rangle| = |\lambda| \, \|w\|^2 \qquad (1^\circ \text{ membro})$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$$

2° membro: $\|v\| \, \|w\| = \|\lambda w\| \, \|w\| = |\lambda| \, \|w\|^2$ ✓

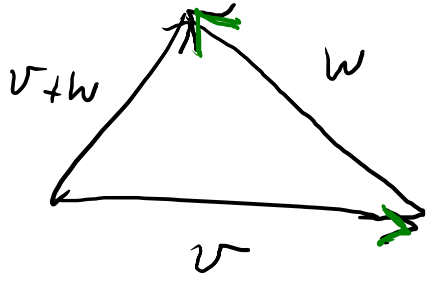
$$\|\lambda w\| = \sqrt{\langle \lambda w, \lambda w\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle w, w\rangle} = |\lambda| \, \|w\|$$

Prop. V sp. vett. Euclideo. Allora:

1) $\|v\| = 0 \iff v = 0$ $(\checkmark)$

2) $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|$ $(\checkmark)$

3) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (disuguaglianza triangolare)



Dim (3)

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w \rangle = \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2 \leq$$

$$\leq \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 = \left(\|v\| + \|w\|\right)^2 \quad \square$$

Poniamo $d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ distanza euclidea

$$d(v,w) = \| v - w \|$$

Corollario La funzione distanza ha le seguenti proprietà:

0) $d(v,w) \geq 0$

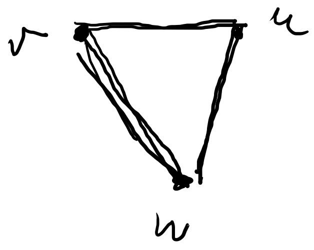
1) $d(v,w) = 0 \iff v = w$

2) $d(v,w) = d(w,v)$

3) $d(v,w) \leq d(v,u) + d(u,w)$

$\forall\, v, w, u \in V$

(disuguaglianza triangolare)



Dim (3)

$$d(v,w) = \|v - w\| = \|v - u + u - w\| \leq \|v - u\| + \|u - w\| =$$

$$= d(v,u) + d(u,w).$$