

17 dicembre

$$\int_0^{\infty} \underbrace{\frac{x}{(x+2)(x^2+x+1)}}_{R(x)} dx$$

Si assume $R(x) \in C^0([0, +\infty)) \Rightarrow R \in L_{loc}([0, +\infty))$

e siccome $R(x) \simeq \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$ per $x \gg 1$

$\Rightarrow R \in L([0, +\infty))$.

$$R(x) = \frac{x}{(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{b}{x-x_+} + \frac{c}{x-x_-}$$

$$= \frac{A}{x+2} + \frac{b(x-x_-) + c(x-x_+)}{(x-x_+)(x-x_-)}$$

$$\Delta = \sqrt{1^2 - 4} = \sqrt{-3}$$

$$x_{\pm} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 + x + 1 = (x - x_+)(x - x_-)$$

$$= \frac{A}{x+2} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

$$R(x) = \frac{x}{(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{(B-\frac{2}{3})x^2 + (2B+C-\frac{2}{3})x + 2C-\frac{2}{3}}{(x+2)(x^2+x+1)}$$

$$x = (B-\frac{2}{3})x^2 + (2B+C-\frac{2}{3})x + 2C-\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} B-\frac{2}{3} = 0 \\ 2B+C-\frac{2}{3} = 1 \\ 2C-\frac{2}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = \frac{2}{3} \\ C = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$(A = -\frac{2}{3})$$

$$\begin{aligned} 2B+C-\frac{2}{3} &= \\ &= \frac{4}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{3}{3} = 1 \end{aligned}$$

$$R(x) = \frac{x}{(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{-\frac{2}{3}^A}{x+2} + \frac{\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}^B}{x^2+x+1}$$

$$x R(x) = \frac{x^2}{(x+2)(x^2+x+1)} = -\frac{2}{3} \frac{x}{x+2} + \frac{\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x}{x^2+x+1}$$

$$\downarrow x \rightarrow +\infty$$

$$0$$

$$= -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

$$A + B = 0$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^y f(x) dx &= -\frac{2}{3} \int_0^y \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{3} \int_0^y \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx \\
 &= -\frac{2}{3} \lg(x+2) \Big|_0^y + \frac{1}{3} \int_1^{y^2+y+1} \frac{1}{u} du \\
 &= +\frac{2}{3} \lg(2) - \frac{2}{3} \lg(y+2) + \frac{1}{3} \lg(y^2+y+1) \quad \begin{array}{l} u = x^2 + x + 1 \\ du = (2x+1) dx \end{array} \\
 &= \frac{2}{3} \lg 2 + \frac{1}{3} \lg \frac{y^2+y+1}{(y+2)^2} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} \lg 2 > 0
 \end{aligned}$$

Quando abbiamo $R(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$ e $\text{grado } P(x) \geq \text{grado } q(x)$
la nozione di espansione di Hermite è diversa.

$$R(x) = \frac{x^3}{(x+2)(x^2+x+1)} \neq \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

per ogni scelta di A, B, C . Questo lo si vede

da $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = 1$ mentre $\forall A, B, C$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \right] = 0$$

$$\frac{x^3}{(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{x^3+3x^2+3x+2}{x^3+3x^2+3x+2} - \frac{3x^2+3x+2}{(x+2)(x^2+x+1)}$$

$$= 1 - \frac{3x^2+3x+2}{(x+2)(x^2+x+1)} = 1 + \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

In generale se $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con $\text{grado } P(x) \geq \text{grado } Q$ è possibile dividere P per Q ottenendo un quoziente $q(x)$ ed un resto $r(x)$. Cioè esiste una unica

Coppio di polinomi $q(z)$ ed $r(z)$ con
grado $r(z) < \text{grado } Q(z)$, tali che

$$P(z) = q(z) Q(z) + r(z).$$

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{q(z) Q(z) + r(z)}{Q(z)} = q(z) + \frac{r(z)}{Q(z)}.$$

Integrale improprio

Teor Sion $f, g \in L_{loc}([a, b))$, $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b)$ e $g(x) > 0 \forall x \in [a, b)$. Se
 $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in [0, +\infty]$ allora valgono:

- 1) Se $0 < L < +\infty$ allora $f \in L[a, b) \Leftrightarrow g \in L[a, b)$
- 2) Se $L = 0$
 $g \in L[a, b) \Rightarrow f \in L[a, b)$
 $f \notin L[a, b) \Rightarrow g \notin L[a, b)$

$$3) L = +\infty$$

$$f \in L[a, b) \Rightarrow g \in L[a, b)$$

$$g \notin L[a, b) \Rightarrow f \notin L[a, b)$$

$$E_{\Delta} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+2)(x^2+x+1)} dx \quad R(x) \quad \text{e' sommabile}$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{x}{(x+2)(x^2+x+1)} dx \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 R(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{(x+2)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$R(x) \in L[1, +\infty) \Leftrightarrow x^{-2} \in L[1, +\infty)$$

Siccome sappiamo che $x^{-2} \in L[1, +\infty)$ segue che

$$R(x) \in L[1, +\infty)$$

$$\int_0^{+\infty} (1 - \tanh(x)) \, dx$$

$$1 - \tanh(x) = o(x^{-n}) \quad \forall n$$

$$1 - \tanh x = 1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\cancel{e^x} + e^{-x} - (\cancel{e^x} - e^{-x})}{e^x + e^{-x}}$$

$$= \frac{2 e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{2 e^{-x}}{e^x (1 + e^{-2x})} = 2 e^{-2x} \frac{1}{1 + e^{-2x}}$$

$$= 2 e^{-2x} (1 + o(1)) = o(x^{-n})$$

$$1 - \tanh(x) \in L[0, \infty) \Leftrightarrow 1 - \tanh x \in L[1, \infty)$$

$$1 - \tanh x = o(x^{-2}) \quad \text{e} \quad x^{-2} \in L[1, \infty) \Rightarrow 1 - \tanh x \in L[1, \infty)$$

Esercizio Sia $f \in L_{loc}([0, +\infty))$ e supponiamo
che esista $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$. Allora, se

$$f \in L[0, +\infty) \Rightarrow L = 0.$$

Risposta Sia $L \neq 0$. Non è restrittivo supporre che
 $L > 0$. Se $L > 0$ supponiamo che esista K t.c.

per $x \geq K$ si ha $f(x) > 0$. E supponiamo anche
che $f \in L[0, +\infty) \Leftrightarrow f \in L[K, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{1} = L > 0$$

Ora applichiamo confronto asintotico, con $g \equiv 1$

$$1) \quad 0 < L < +\infty \quad f \notin L[K, +\infty) \Leftrightarrow 1 \notin L[K, +\infty)$$

$$\text{Sappiamo che } 1 \notin L[K, +\infty) \quad 1 = \frac{1}{x^0} \quad 0 < 1 \\ \Rightarrow f \notin L[K, +\infty)$$

$$3) \quad L = +\infty \quad 1 \notin L[K, +\infty) \Rightarrow f \notin L[K, +\infty)$$