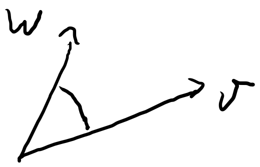
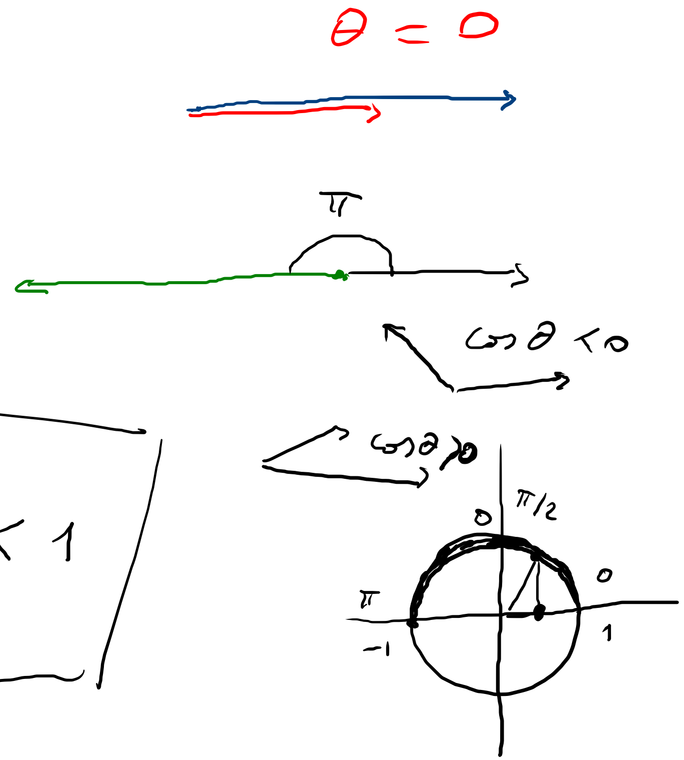
V spazio vett. Euclideo



$v, w \in V - \{0_V\}$

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \, \|w\| \quad \text{(Cauchy-Schwarz)}$$

$$\frac{|\langle v, w \rangle|}{\|v\| \, \|w\|} \leq 1 \implies \boxed{-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \, \|w\|} \leq 1}$$



$$\implies \exists ! \ \boxed{\theta \in [0, \pi]} \quad \text{t.c.} \quad \cos\theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \, \|w\|}$$

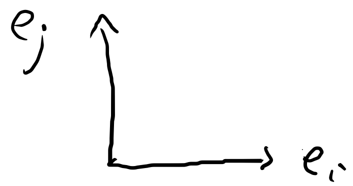
Def Dato V spazio vett. Euclideo, e dati $v, w \in V - \{0\}$, si chiama angolo di v e w il numero $\theta = \widehat{vw} := \arccos \dfrac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \, \|w\|} \in [0, \pi]$.

$\mathbb{R}^n$ $\quad \langle \, , \, \rangle$ canonico

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\langle X, Y \rangle = {}^tX\, Y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$$\widehat{e_i e_j} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } i \neq j \end{cases} \qquad \Longrightarrow$$

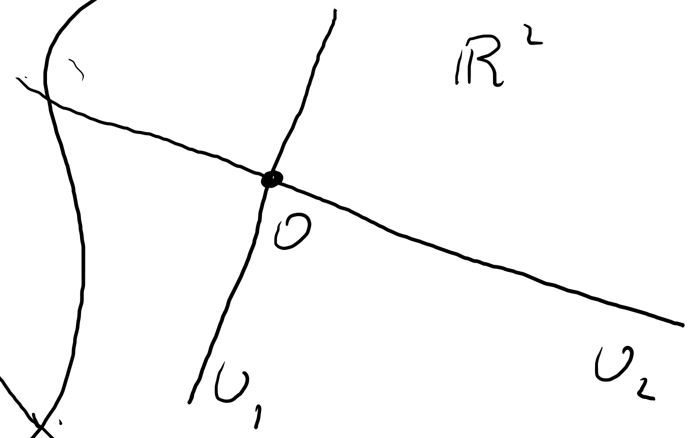


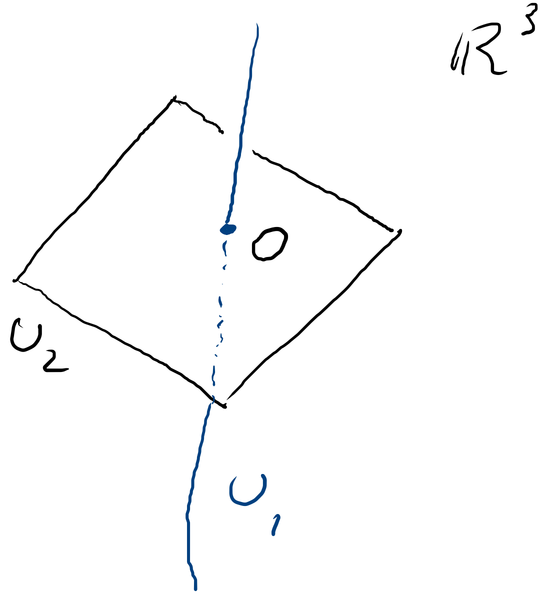
<u>Def</u> V sp. vett. Euclideo. Diciamo che $v, w \in V$ sono <u>ortogonali</u> se $\langle v, w \rangle = 0$.

<u>OSS.</u> Se $v, w \in V - \{0_V\}$ e v, w ortogonali $\Longrightarrow$ $\boxed{\widehat{v w} = \frac{\pi}{2}}$

Def $\underbrace{U_1, U_2}_{\text{sottosp. vett.}} \subset V$ (sp. vett. Euclideo). Diciamo che U_1 e U_2 sono ortogonali se

$$\langle u_1, u_2 \rangle = 0 \quad \forall u_1 \in U_1, \ \forall u_2 \in U_2$$





Prop. Se $U_1, U_2 \subset V$ sono ortogonali allora

$$U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$$

Dim $v \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow$

$$\langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0_V.$$

$(u_1 = u_2 = v)$

$$\boxed{U_1 \oplus U_2 \text{ è diretta!}}$$

Forme bilineari e matrici

$b : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ forma bilineare su V $\mathbb{K}$-sp. vett., $\dim V = n < \infty$

$\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ base ordinata di V

$$a_{ij} := b(v_i, v_j) \in \mathbb{K} \rightsquigarrow A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$$

matrice di b rispetto alla base $\mathcal{V}$

Poniamo $M_{\mathcal{V}}(b) := A = \big(b(v_i, v_j) \big)_{i,j=1,\dots,n}$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^{\mathcal{V}} = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}^{\mathcal{V}} = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}\right\} \in \mathbb{K}^n$$

$$b(v,w) = b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i , \sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right) \underset{\text{bilinéarité}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \underbrace{b(v_i, v_j)}_{a_{ij}} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, y_j = \boxed{{}^tX\, A\, Y}$$

$${}^tX\, A\, Y = {}^tX \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\, y_j \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} x_i\, a_{ij}\, y_j$$

Sia $A \in M_n(\mathbb{K}) \rightsquigarrow b_A : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$

$$b_A(X,Y) := {}^tX A Y$$

è bilineare! (*)

Prop. V sp. vett. con una forma bil. $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$, $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ base di V.
Sia $A = M_{\mathcal{V}}(b)$ la matrice di b rispetto a $\mathcal{V}$. Allora

1) b simmetrica $\iff$ A simmetrica (${}^tA = A$)

2) b antisimmetrica $\iff$ A antisimmetrica (${}^tA = -A$)

<u>Dim</u> (di (1), <u>(2) per esercizio</u>)

$\Rightarrow$) b simmetrica $\Rightarrow a_{ij} = b(v_i, v_j) = b(v_j, v_i) = a_{ji} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$

$\Rightarrow$ A simmetrica

$\Leftarrow$) A simmetrica: $\underline{b(v, w)} = \underbrace{{}^tX A Y}_{\in \mathbb{K}} = {}^t({}^tX A Y) = {}^tY\, {}^tA\, X =$

$= {}^tY A X = \underline{b(w, v)}$

A simmetrica

$v = X^{\mathcal{V}}$

$w = Y^{\mathcal{V}}$

$\forall v, w \in V$.

$A \in M_n(\mathbb{K})$ è simmetrica $\Rightarrow$ $b_A : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$

$b_A(X,Y) = {}^tX A Y$ è simmetrica

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\quad A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica

$b_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$b_A(X,Y) = {}^tX A Y$ simmetrica

A definita >0 se b_A def. >0
" " <0 se b_A def <0
indefinita " "
Semidefinita ≥ 0 (≤ 0)

Problema: Come cambia la matrice di una forma bil. su V cambiando la base?

b forma bil. su V $\quad b : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$

$\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ base di V $\rightsquigarrow A = M_{\mathcal{V}}(b) \in M_n(\mathbb{K})$

$\mathcal{V}' = (v_1', \dots, v_n')$ altra base di V $\rightsquigarrow A' = M_{\mathcal{V}'}(b) \in M_n(\mathbb{K})$

Che relazione c'è tra $\underline{A}$ e A'?

$S \in GL_n(\mathbb{K})$ matrice del cambiamento di base $\mathcal{V}' \rightsquigarrow \mathcal{V}$

$S = M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}'}(id_V)$ $\qquad S = (S_{(1)} \cdots S_{(n)})$ $\qquad \underline{S_{(i)}^{\mathcal{V}} = v_i'}$

$$v = X^{\mathcal{V}} = (X')^{\mathcal{V}'} \qquad X = S X'$$

$$w = Y^{\mathcal{V}} = (Y')^{\mathcal{V}'} \qquad Y = S Y'$$

$$b(v,w) = \underbrace{{}^tX\, A\, Y}_{\shortparallel} = \underbrace{{}^tX'\, \underline{A'}\, Y'}_{\shortparallel}$$

$$ {}^t(SX')ASY' = {}^tX' \underbrace{{}^tSAS}_{\shortparallel \atop A'} Y'$$

$\forall \; X', Y' \in \mathbb{K}^n$

$X' = e_i, \quad Y' = e_j$

$${}^te_i\, A'\, e_j = a'_{ij}$$
$$\shortparallel$$
$${}^te_i\, \underbrace{{}^tSAS}\, e_j = ({}^tSAS)_{ij}$$

Prop. $A, A' \in M_n(\mathbb{K})$ sono matrici di b rispetto a due basi $\Longleftrightarrow \exists\, S \in GL_n(\mathbb{K})$ t.c. $\boxed{A' = {}^tS A S}$

Def. Due matrici $A, A' \in M_n(\mathbb{K})$ sono dette congruenti se

$\exists\, S \in GL_n(\mathbb{K})$ t.c. $\boxed{A' = {}^tS A S}$

NB Non confondere congruenza con similitudine!

$$A' = {}^tS A S$$

cambiamento di base per forme bilineari

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$A' = S^{-1} A S$$

cambiamento di base per endomorfismi $V \longrightarrow V$

Congruenza e similitudine sono entrambe rel. d'equivalenza in $M_n(\mathbb{K})$

OSS. Matrici congruenti hanno lo stesso rango!

Def. $b : V \times V \to \mathbb{K}$ bilineare, poniamo

$$\operatorname{rg} b := \operatorname{rg}\left(M_{\mathcal{V}}(b)\right)$$

per una qualunque base $\mathcal{V}$ di V.

Esempi prodotti scalari in $\mathbb{R}^2$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}$$ simmetrica $\Longrightarrow$ $b_A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ simmetrica

$$b_A(X,Y) = {}^tX A Y$$

$$\boxed{{}^tX A Y = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j}$$

A è definita positiva? $\boxed{\text{SI}}$

$$b_A(X,X) > 0 \quad \forall X \neq 0 \quad ?$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$${}^tX A X = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$$

$${}^tX A X = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 =$$

$$= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + x_2^2 =$$

$$= (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 \geq 0$$

vale $= 0 \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

b_A è un prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ è simmetrica in $\mathbb{R}^2$

è def. >0 ?

Il prod. scalare standard in $\mathbb{R}^n$, rispetto alla base canonica ha matrice I_n

$${}^tX\,BX = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 =$$

$$= (x_1+x_2)^2 + x_2^2 \geq 0$$

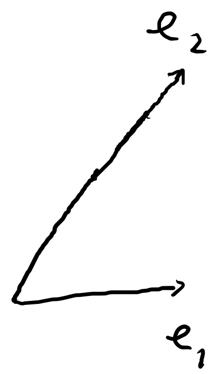
Vale $=0 \iff \underbrace{(x_1+x_2)^2}_{=0} + \underbrace{x_2^2}_{=0} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

B è def. $>0 \rightsquigarrow \langle X, Y \rangle_B$

$\|e_1\| = 1$, $\|e_2\| = \sqrt{2}$, $\langle e_1, e_2 \rangle = 1 \Rightarrow e_1, e_2$ non sono ortogonali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$

$$\cos \widehat{e_1 e_2} = \frac{\langle e_1, e_2 \rangle_B}{\|e_1\|_B \, \|e_2\|_B} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\widehat{e_1 e_2} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$



$\langle \cdot , \cdot \rangle_B$

$\langle \cdot , \cdot \rangle_{standard}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$

simmetrica

Non definisce un prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$

C def. > 0 ?

$$ {}^tX\, C\, X = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + 4x_1x_2 + \underbrace{4x_2^2 - 3x_2^2}_{} = $$

$$ = (x_1 + 2x_2)^2 - 3x_2^2 $$

indefinita!

$\langle e_1, e_1 \rangle_C = 1 > 0$ $\qquad$ $\langle v, v \rangle_C = -3 < 0$

$v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$