$$\begin{cases} y' = \dfrac{4x^2+3y^2}{2xy} = 2\dfrac{x}{y} + \dfrac{3}{2}\dfrac{y}{x} \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

$$u = \frac{y}{x} \qquad \boxed{y = xu}$$

$$y'(x) = u(x) + x u'(x)$$

$$u + x u' = 2\frac{1}{u} + \frac{3}{2}u \qquad u(2) = \frac{y(2)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} u' = \dfrac{1}{x}\left[2\dfrac{1}{u} + \dfrac{3}{2}u - u\right] \\ u(2) = 1/2 \end{cases} \qquad u' = \frac{1}{x}\left(2\frac{1}{u} + \frac{1}{2}u\right) = \frac{1}{x}\,\frac{4+u^2}{2u}$$

$$\begin{cases} u' = \dfrac{1}{x}\,\dfrac{4+u^2}{2u} \\ u(2) = 1/2 \end{cases}$$

$x_0 = 2$

$h(u)$

$h(\frac{1}{2}) \neq 0$

$$\int_2^x \frac{2u}{4+u^2}\,u'\,dt = \int_2^x \frac{1}{t}\,dt = \log\frac{x}{2}$$

$z = u(t)$

$$\int_{1/2}^{u(x)} \frac{2z}{4+z^2}\,dz = \Big[\log(4+z^2)\Big]_{1/2}^{u(x)} = \log\frac{4+u^2}{4+\frac{1}{4}} = \log\left[\frac{4}{17}(4+u^2)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{4}{17}(4+u^2) = \frac{x}{2} \qquad 4+u^2 = \frac{17}{8}x \qquad u^2 = \frac{17}{8}x - 4 \qquad u(x) = \sqrt{\frac{17}{8}x - 4}$$

$$y(x) = x\sqrt{\frac{17}{8}x - 4} \qquad y : \left[\frac{32}{17}, +\infty\right[\to \mathbb{R}$$

Equazioni di Bernoulli

$y' = a y + b y^{\gamma}$ $\quad \gamma \in \mathbb{R} \quad a, b \in C(I)$ $\quad$ se $\gamma = 0 \quad y' = ay + b$

lineari

se $\gamma = 1 \quad y' = (a+b) y$

$\gamma \neq 0, 1 \qquad y \neq 0$

$$\frac{y'}{y^{\gamma}} = a y^{1-\gamma} + b$$

$$\frac{d}{dy} y^{1-\gamma} = (1-\gamma) y^{-\gamma}$$

$$y(x) \quad \frac{d}{dx} y(x)^{1-\gamma} = (1-\gamma) \frac{y'}{y^{\gamma}}$$

$$(1-\gamma) \frac{y'}{y^{\gamma}} = a(1-\gamma) y^{1-\gamma} + b(1-\gamma)$$

$$\boxed{u = y^{1-\gamma}}$$

$u' = a(1-\gamma) u + b(1-\gamma)$ lineare

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x^2y^2} = -\dfrac{1}{x}y + \dfrac{1}{x^2}y^{-2} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

$y' = a\,y + b\,y^{\gamma}$

$\gamma = -2$

$y = u^{1/3}$

$y^2y' = -\dfrac{1}{x}y^3 + \dfrac{1}{x^2}$

$u = y^3$ $\quad u' = 3y^2y'$

$3y^2y' = -\dfrac{3}{x}y^3 + \dfrac{3}{x^2}$

$u(1) = 8$

$$\begin{cases} u' = -\dfrac{3}{x}u + \dfrac{3}{x^2} \\ u(1) = 8 \end{cases}$$

$x > 0$

$a(x) = -\dfrac{3}{x}$ $\quad b(x) = \dfrac{3}{x^2}$ $\quad A(x) = -3\log x$ $\quad e^{A(x)} = x^{-3}$ $\quad e^{-A(t)} = t^3$

$y_0 = 8$ $\quad x_0 = 1$ $\quad e^{-A(1)} = 1$

$$u(x) = \underset{y_0}{8}\,e^{A(x)-A(x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{A(x)-A(t)}\cdot b(t)\,dt$$

$$= 8x^{-3} + x^{-3}\int_{x_0=1}^{x} t^3\cdot\frac{3}{t^2}\,dt = 8x^{-3} + x^{-3}\frac{3}{2}(x^2-1) = \left(8-\frac{3}{2}\right)x^{-3} + \frac{3}{2}x^{-1}$$

t

$u(x) = \dfrac{13}{2}x^{-3} + \dfrac{3}{2}x^{-1}$

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{13}{2}x^{-3} + \frac{3}{2}x^{-1}} = \frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{13}{2} + \frac{3}{2}x^2}$$

Modello di propagazione di una malattia M S $M = 1 - S$

$$M' = k\, M(1-M)$$

$$\boxed{y' = ky - ky^2}$$ Bernoulli / variabili separabili $\frac{M'}{kM(1-M)} = 1$ ---

$\gamma = 2$

$$\frac{y'}{y^2} = k\frac{1}{y} - k \qquad u = \frac{1}{y} \quad u' = -\frac{1}{y^2} \quad y > 0$$

$$-\frac{y'}{y^2} = -k\frac{1}{y} + k$$

$$u' = -ku + k \qquad \underline{u(x) = \lambda e^{-kx} + 1} \qquad y(x) = \frac{1}{\lambda e^{-kx} + 1} \qquad y(0) = \frac{1}{\lambda + 1}$$

$$\lambda + 1 = \frac{1}{y(0)}$$

$$\lambda = \frac{1}{y_0} - 1 = \frac{1 - y_0}{y_0} \qquad M(x) = \frac{1}{\frac{1-M_0}{M_0} e^{-kx} + 1} = \frac{M_0}{M_0 + (1-M_0)e^{-kx}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} M(x) = 1$$

Torniamo alle nostre equazioni differenziali lineari del primo ordine da un punto di vista più astratto

(C) $\quad y' = a(x)\, y + b(x)$ $\qquad a, b \in C(I)$ $\quad I$ intervallo

(H) $\quad y' = a(x)\, y$ $\qquad$ equazione omogenea associata all'equazione "completa" (C).

Consideriamo l'operatore differenziale $L : C^1(I) \to C^0(I)$

$$y \in C^1(I) \qquad L(y)(x) = \underline{y'(x) - a(x)\, y(x)} \qquad L(y) \in C^0(I)$$

Oss: L è lineare

siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad y_1, y_2 \in C^1(I)$ $\qquad L(\alpha y_1 + \beta y_2) = (\alpha y_1 + \beta y_2)' - a(\alpha y_1 + \beta y_2) =$

$$= \alpha y_1' + \beta y_2' - a \alpha y_1 - \beta a y_2 = \alpha (y_1' - a y_1) + \beta (y_2' - a y_2) = \alpha L(y_1) + \beta L(y_2).$$

$\boxed{\mathrm{Ker}\, L}$ = nucleo di L $= \{ y \in C^1(I) : L(y) = 0 \} = \{ y \text{ soluzioni di (H)} \}$

$\mathrm{Ker}\, L = S_H = \{$ soluzioni di $(H)\}$ è uno spazio vettoriale di dimensione 1

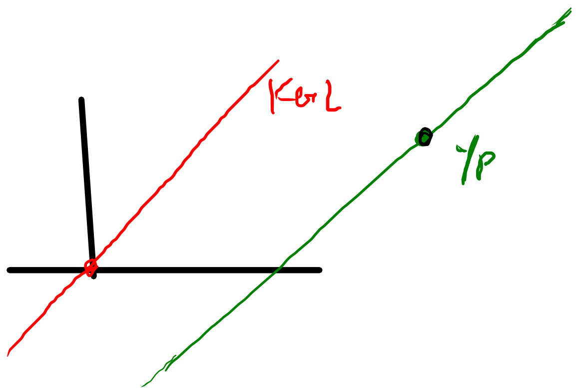
$\mathrm{Ker}\, L = \mathrm{span}\,\{ e^{A(x)} \}$ $\quad u_1(x) = e^{A(x)}$ $\quad [\, A'(x) = a(x) \,]$

Infatti ogni soluzione di (H) $y' = a(x) y$ è del tipo $\lambda u_1(x)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(C) \qquad y' - a(x) y = b(x)$$

$$L(y) = b$$

L'insieme delle soluzioni di (C) è $L^{-1}\{b\} = \{ y \in C^1(I) : L(y) = b \}$; questo è uno spazio affine ; è il "traslato" di $\mathrm{Ker}\, L$.



$L^{-1}\{b\} = S_C = \{$ soluzioni di $(C)\} =$

$$= \mathrm{Ker}\, L + \{y_p\} = \{ u + y_p : u \in \mathrm{Ker}\, L \}$$

y_p è una qualsiasi fissata soluzione di (C)

Supponiamo di conoscere $\operatorname{Ker} L = \operatorname{span}\{u_1\}$ $e^{A(x)}$

Supponiamo di conoscere una soluzione particolare y_p di (C) $y' = a(x)y + b(x)$

Allora le soluzioni di (C) sono tutte e sole le funzioni $y \in C^1(I)$ che si possono scrivere nella forma $y = u + y_p$ con $u \in \operatorname{Ker} L$.

Dim: Sia y soluzione di (C); allora $u = y - y_p$ soddisfa

$$u' - a(x)u = (y' - y_p') - a(x)(y - y_p) = \underbrace{[y' - a(x)y]}_{= b(x)} - \underbrace{[y_p' - a(x)y_p]}_{= b(x)} = b(x) - b(x) = 0$$

quindi $u \in \operatorname{Ker} L$. $y = u + y_p$.

Viceversa se $y = u + y_p$ con $u \in \operatorname{Ker} L$ si ha $L(y) = \underbrace{L(u)}_{=0} + \underbrace{L(y_p)}_{=b} = b$ //

Problema: trovare una soluzione y_p dell'equazione completa

Teorema (Metodo della variazione della costante per la determinazione di una soluzione particolare dell'equazione completa).

(H) $y' = a(x)\,y$ $\qquad \boxed{y(x) = \lambda\, u_1(x)} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

(C) $y' = a(x)\,y + b(x)$ $\qquad$ cercheremo una soluzione di (C) del tipo $\boxed{y(x) = \lambda(x)\, u_1(x)}$

faccio "variare" la costante λ

Fissiamo una base di Ker L $\quad \{u_1\}$

consideriamo $y(x) = \lambda(x)\, u_1(x)$ $\quad$ [$\lambda(x)$ sarà una funzione da determinare]

$$L(y)(x) = \underbrace{[\lambda(x)\, u_1(x)]'}_{\lambda'(x)\, u_1(x) + \lambda(x)\, u_1'(x)} - a(x)\cdot\lambda(x)\, u_1(x) = \lambda'(x)\, u_1(x) + \lambda(x)\,\underbrace{(u_1'(x) - a(x)\, u_1(x))}_{L(u_1)(x) = 0} \overset{?}{=} b(x)$$

$$\lambda'(x) = \frac{1}{u_1(x)}\cdot b(x)$$

$\forall x \in I \qquad u_1 \neq 0$

può esistere $x_0 \in I$ tale che $u_1(x_0) = 0$?

(se esistesse ovvero che u_1 è soluzione del problema di Cauchy

$$(CP)\begin{cases} u' = a(x)\, u(x) \\ u(x_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow u_1(x) = 0 \ \forall x \quad \text{impossibile}$$
)

$$\lambda(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{u_1(t)}\, b(t)\,dt$$

$x_0 \in I$

$$y_p(x) = \lambda(x)\, u_1(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{u_1(t)}\, b(t)\, dt \cdot u_1(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,t)\, dt$$

$\parallel$

nucleo risolvente

$$= u_1(x) \cdot \frac{1}{u_1(t)}$$

$$u_1(x) = e^{A(x)}$$

$$K(x,t) = e^{A(x)-A(t)}$$

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} e^{A(x)-A(t)}\, b(t)\, dt$$

$$\left[\quad y(x) = \underbrace{\lambda}\, e^{A(x)} + \underbrace{\int_{x_0}^{x} e^{A(x)-A(t)}\, b(t)\, dt} \right]$$

Equazioni lineari

Problema linearizzato

$$(CP) \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

linearizzare il problema significa linearizzare f ⇝ approssimante lineare

$$\tilde{f}(x,y) = f(x_0,y_0) + \langle \nabla f(x_0,y_0), (x-x_0, y-y_0)^T \rangle$$

$(x_0, y_0)^T$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$\Downarrow$

$$(CP_{lin}) \begin{cases} u' = \tilde{f}(x,u) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases}$$

problema lineare

Se u è soluzione di (CP_{lin}) e y è soluzione di (CP), quanto sono diverse u e y vicino a x_0?

Primo ordine: $u(x_0) = y(x_0)$

$$u'(x_0) \qquad u'(x) = \tilde{f}(x, u(x)) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \qquad u'(x_0) = f(x_0,y_0)$$

$$y'(x_0) \qquad y'(x) = f(x, y(x)) \qquad y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0,y_0)$$

Secondo ordine

$u''(x_0) \qquad y''(x_0)$

$$u'(x) = \tilde{f}(x, u(x)) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(u(x)-y_0)$$

$$u''(x) = \frac{d}{dx}\tilde{f}(x, u(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,u'(x)$$

$$u''(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,u'(x_0)$$

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

$$y''(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \cdot y'(x)$$

$$y''(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y(x_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot y'(x_0)$$

$$\Rightarrow u''(x_0) = y''(x_0)$$

quindi $\quad y(x) - u(x) = o(|x-x_0|^2)$

Es: ① $\begin{cases} y' = e^y \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\qquad f(x,y) = e^y \qquad \tilde{f}(x,y) = f(0,0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_{0} x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y = 1 + y$

$(x_0, y_0)^T = (0,0)^T$

② $\begin{cases} u' = u+1 \\ u(0) = 0 \end{cases}$

① $\quad e^{-y} y' = 1 \qquad \int_0^x e^{-y} y' \, dt = x \qquad \int_0^{y(x)} e^{-z} dz = (-e^{-y(x)} + 1)$

$x = -e^{-y} + 1 \qquad e^{-y} = 1 - x \qquad -y = \log(1-x) \qquad y(x) = -\log(1-x)$

② $\quad u(x) = e^x - 1$

$$u(x) = e^{x} - 1$$
$$u'(x) = e^{x}$$
$$u''(x) = e^{x}$$
$$u'''(x) = e^{x}$$

$$y(x) = -\log(1-x)$$
$$y'(x) = +\frac{1}{1-x}$$
$$y''(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$
$$y'''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$u(0) = 0$$
$$u'(0) = 1$$
$$u''(0) = 1$$
$$u'''(0) = 1$$

$$y(0) = 0$$
$$y'(0) = 1$$
$$y''(0) = 1$$
$$y'''(0) = 2$$

$$u \simeq x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots$$

$$y \simeq x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$$

Equazioni differenziali ordinarie di ordine N (in forma normale)

(E) $u^{(N)} = f(x, u, u', \dots, u^{(N-1)})$

$f : A \subseteq \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$

$f(x, \underbrace{y_1, y_2, \dots, y_N})$

$u \quad u'$

$$(CP)\begin{cases} u' = f(x, u, u', \dots, u^{(N-1)}) \\ u(x_0) = w_1^0 \\ u'(x_0) = w_2^0 \\ u''(x_0) = w_3^0 \\ \vdots \\ u^{(N-1)}(x_0) = w_N^0 \end{cases}$$

N condizioni iniziali

$(x_0, w_1^0, w_2^0, \dots, w_N^0)^T \in A$

Def.: u è soluzione di (E) se $u : I \to \mathbb{R}$ I intervallo, u n volte derivabile, $\underline{\forall x \in I}$

$(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(N-1)}(x))^T \in A$ e $f(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(N-1)}(x)) = u^{(N)}(x)$

u è soluzione di CP se inoltre soddisfa $u(x_0) = w_1^0$, $u'(x_0) = w_2^0, \dots,$ $u^{(N-1)}(x_0) = w_N^0$.

Teorema (di esistenza e unicità)