Equazioni differenziali ordinarie di ordine N

$$(CP)\begin{cases} u^{(N)} = f(x, u, u', \dots, u^{(N-1)}) \\ u(x_0) = w_1^0 \\ u'(x_0) = w_2^0 \\ \vdots \\ u^{(N-1)}(x_0) = w_N^0 \end{cases}$$

$f: A \subseteq \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$

$(x_0, w^0)^T \in A \qquad w^0 = (w_1^0, w_2^0, \dots, w_N^0)^T$.

Teorema (esistenza e unicità)

$f: [x_0, x_0+a] \times K \subseteq \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R} \qquad K$ compatto

- Sia f continua, allora esiste $\alpha > 0$ e una soluzione di (CP) $u: [x_0, x_0+\alpha] \to \mathbb{R}$.
- Sia f continua e Lipschitziana in y uniformemente rispetto a x $\left(y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T\right)$, cioè esiste $L \in \mathbb{R}^+$ tale che $\forall x \in [x_0, x_0+a]$ e $\forall y, z \in K$ si ha $|f(x,y) - f(x,z)| \leq L\, \|y - z\|$

Allora la soluzione è unica.

Equazioni differenziali ordinarie <u>lineari</u> di ordine N

$$y^{(N)} = a_{N-1}(x)\, y^{(N-1)} + a_{N-2}(x)\, y^{(N-2)} + \dots + a_1 y' + a_0 y + b(x)$$

$a_k, b \in C(I)$ $\qquad L : C^N(I) \to C^0(I)$

$$L(y)(x) = y^{(N)}(x) - a_{N-1}(x)\, y^{(N-1)}(x) - \dots - a_0(x)\, y(x)$$

equazione omogenea $\quad$ (H) $\quad Ly = 0$
equazione completa $\quad$ (C) $\quad Ly = b$.

<u>oss</u>: L è lineare, $L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \left((\alpha y_1 + \beta y_2)^{(N)} - a_{N-1}(\alpha y_1 + \beta y_2)^{(N-1)} - \dots a_0 (\alpha y_1 + \beta y_2) \right) =$

$= \alpha y_1^{(N)} + \beta y_2^{(N)} - a_{N-1} \alpha y_1^{N-1} - a_{N-1} \beta y_2^{N-1} + \dots - \alpha a_0 y_1 - \beta a_0 y_2 =$

$= \alpha (y_1^{(N)} - a_{N-1} y_1^{(N)} + \dots - a_0 y_1) + \beta (y_2^{(N)} - a_{N-1} y_2^{(N-1)} + \dots - a_0 y_2) = \alpha L(y_1) + \beta L(y_2)$

<u>oss</u>: $\mathrm{Ker}\, L = S_H = \{$ soluzioni dell'equazione omogenea $\}$

OSS: sia y_p una qualunque soluzione fissata di (C); allora l'insieme

$$S_c = \{\text{soluzioni di } (C)\} = \operatorname{Ker} L + \{y_p\} = \{u + y_p : u \in \operatorname{Ker} L\}$$

Infatti, sia $y \in S_c$; considero $u = y - y_p$, si ha $L(u) = L(y) - L(y_p) = b - b = 0$

$\Rightarrow u \in \operatorname{Ker} L \qquad y = u + y_p$

Viceversa sia $y = u + y_p$ con $u \in \operatorname{Ker} L$; allora $L(y) = L(u) + L(y_p) = b$ //

Teorema ($\operatorname{Ker} L$)

$\operatorname{Ker} L$ ha dimensione N.

Dim: consideriamo N problemi di Cauchy: (fissiamo $x_0 \in I$)

$$(CP_1)\ \begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \\ \vdots \qquad 0 \\ y^{(N-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \qquad (CP_2)\ \begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \\ \vdots \qquad 0 \\ y^{(N-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \qquad \dots \qquad (CP_N)\ \begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(N-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

Ciascuno di questi problemi ha una ed una sola soluzione $u_i : I \to \mathbb{R}$ $i = 1, \dots, N$

Verifichiamo che $\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$ è una base per $\ker L$.

1) Sono linearmente indipendenti

Sia $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_N u_N = 0$ ← come funzione, quindi $\forall x$

$$u = 0 \Rightarrow u' = 0 \quad u'' = 0 \quad \dots \quad u^{(N-1)} = 0$$

$$0 = u(x_0) = \lambda_1 \underbrace{u_1(x_0)}_{=1} + \lambda_2 \underbrace{u_2(x_0)}_{=0} + \dots + \lambda_N \underbrace{u_N(x_0)}_{=0} = \lambda_1 \qquad \boxed{\lambda_1 = 0}$$

$$0 = u'(x_0) = \lambda_1 \underbrace{u_1'(x_0)}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{u_2'(x_0)}_{=1} + \dots + \lambda_N \underbrace{u_N'(x_0)}_{=0} = \lambda_2 \qquad \boxed{\lambda_2 = 0}$$

$$\vdots$$

$$0 = u^{(k)}(x_0) = \lambda_1 \underbrace{u_1^{(k)}(x_0)}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{u_2^{(k)}(x_0)}_{=0} + \dots + \lambda_k \underbrace{u_k^{(k)}(x_0)}_{=1} + \dots + \lambda_N u_N^{(k)}(x_0) = \lambda_k$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_N = 0}$$

2) $\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$ genera lo spazio $\operatorname{Ker} L$. $\qquad Ly = 0$

Sia $u \in \operatorname{Ker} L$; consideriamo il problema

$$(CP)\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = u(x_0) \\ y'(x_0) = u'(x_0) \\ \vdots \\ y^{(N-1)}(x_0) = u^{(N-1)}(x_0) \end{cases}$$

u è soluzione di (CP)

ma anche la funzione

$$v(x) = u(x_0)\cdot u_1(x) + u'(x_0)\cdot u_2(x) + \dots + u^{(N-1)}(x_0)\cdot u_N(x)$$

è soluzione

infatti $L(v)(x) = u(x_0)\cdot \underbrace{L(u_1)(x)}_{=0} + u'(x_0)\cdot \underbrace{L(u_2)(x)}_{=0} + \dots + u^{(N-1)}(x_0)\, \underbrace{L(u_N)(x)}_{=0} = 0$

$$v(x_0) = u(x_0)\cdot u_1(x_0) + u'(x_0)\cdot \underbrace{u_2(x_0)}_{=0} + \dots + u^{(N-1)}(x_0)\cdot \underbrace{u_N(x_0)}_{=0} = u(x_0)\cdot 1 = u(x_0)$$

$$v'(x_0) = u(x_0)\cdot \underbrace{u_1'(x_0)}_{=0} + u'(x_0)\cdot \underbrace{u_2'(x_0)}_{=1} + \dots + u^{(N-1)}(x_0)\cdot \underbrace{u_N'(x_0)}_{=0} = u'(x_0)$$

$\vdots$

$$v^{(N-1)}(x_0) = u^{(N-1)}(x_0)$$

Per l'unicità della soluzione si ha $u = v$

Per risolvere (C)

1) determinare $\operatorname{Ker} L$ (una base)

2) determinare una soluzione particolare di (C)

Ricerca della soluzione particolare.

Wronskiano

Siano $u_1, u_2, \dots, u_N$ funzioni derivabili $N-1$ volte $u_i : I \to \mathbb{R}$.

diremo wronskiano la funzione

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \cdots & u_N(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \cdots & u_N'(x) \\ \vdots & & & \\ u_1^{(N-1)}(x) & u_2^{(N-1)}(x) & \cdots & u_N^{(N-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Lemma del Wronskiano

Siano $u_1, u_2, \dots, u_N$ soluzioni dell'equazione omogenea $Lu = 0$.
Supponiamo che esista $x_0 \in I$ tale che $W(x_0) = 0$.
Allora $W(x) = 0 \quad \forall x \in I$.

[In dimensione $N = 1$ $\quad y' - a y = 0 \quad u_1(x) \neq 0 \ \forall x$ perché se fosse $u_1(x_0) = 0$ allora u_1 sarebbe soluzione di $\begin{cases} y' - a y = 0 \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$ ma la funzione $v(x) \equiv 0$ è soluzione, e quindi per unicità si ha $u = 0$.]

Sia $W(x_0) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} u_1(x_0) & u_2(x_0) & \cdots & u_N(x_0) \\ u_1'(x_0) & u_2'(x_0) & \cdots & u_N'(x_0) \\ \vdots & & & \\ u_1^{(N-1)}(x_0) & u_2^{(N-1)}(x_0) & \cdots & u_N^{(N-1)}(x_0) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$ le colonne della matrice sono linearmente dipendenti

quindi esistono $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ non tutti nulli tali che

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} u_1(x_0) \\ u_1'(x_0) \\ \vdots \\ u_1^{(N-1)}(x_0) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} u_2(x_0) \\ u_2'(x_0) \\ \vdots \\ u_2^{(N-1)}(x_0) \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_N \begin{pmatrix} u_N(x_0) \\ u_N'(x_0) \\ \vdots \\ u_N^{(N-1)}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Consideriamo la funzione $v(x) = \lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x) + \cdots + \lambda_N u_N(x)$

v è soluzione di

$$(CP) \begin{cases} Lv = 0 \\ v(x_0) = 0 \\ v'(x_0) = 0 \\ v^{(N-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

ma anche 0 è soluzione, quindi

$v(x) = 0 \quad \forall x$

Quindi si ha $\lambda_1 \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_1'(x) \\ \vdots \\ u_1^{(N-1)}(x) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} u_2(x) \\ u_2'(x) \\ \vdots \\ u_2^{(N-1)}(x) \end{pmatrix} + \dots + \lambda_N \begin{pmatrix} u_N(x) \\ u_N'(x) \\ \vdots \\ u_N^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} = 0 \quad \forall x$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ non sono tutti nulli, quindi le colonne della matrice wronskiana (in x) sono linearmente dipendenti, perciò

$W(x) = 0 \quad \forall x \in I.$

Metodo della variazione delle costanti per la determinazione di una soluzione particolare di un'equazione differenziale ordinaria lineare completa di ordine N

$$Ly = y^{(N)} - a_{N-1} y^{(N-1)} - \dots - a_0 y \qquad (H)\ Ly = 0 \qquad (C)\ Ly = b$$

$a_i, b \in C(I)$

sia $\underbrace{\{u_1, u_2, \dots, u_N\}}$ una base di $\operatorname{Ker} L$. Sia $x_0 \in I$. Allora, posto

$$\underbrace{K(x,s)} = \frac{1}{W(s)} \det \begin{pmatrix} u_1(s) & u_2(s) & \cdots & u_N(s) \\ u_1'(s) & u_2'(s) & \cdots & u_N'(s) \\ \vdots & & & \\ u_1^{(N-2)}(s) & u_2^{(N-2)}(s) & \cdots & u_N^{(N-2)}(s) \\ u_1(x) & u_2(x) & \cdots & u_N(x) \end{pmatrix}$$

nucleo risolvente dell'equazione

posso dividere perché per il lemma del Wronskiano si ha $W(s) \neq 0 \ \forall s$.

Allora $\quad y_p(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,s)\, b(s)\, ds \quad$ è una soluzione particolare di (c).
$Ly = b$.

[$n = 1 \quad K(x,s) = \frac{1}{W(s)} \cdot \left(u_1(x) \right) = \frac{1}{u_1(s)} u_1(x) \qquad u_1(x) = e^{A(x)}$

$K(x,s) = e^{A(x)} e^{-A(s)} \qquad y_p(x) = \int_{x_0}^{x} e^{A(x) - A(s)}\, b(s)\, ds$]

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Dimostrazione per $n = 2$

cerchiamo soluzioni del tipo $\quad v(x) = \lambda_1(x) u_1(x) + \lambda_2(x) u_2(x)$

$v'' = a_1 v' + a_0 v + b \qquad v' = \lambda_1' u_1 + \lambda_1 u_1' + \lambda_2' u_2 + \lambda_2 u_2'$

imponiamo che sia $= 0$

Cerchiamo $\lambda_1(x)$ $\lambda_2(x)$ tali che $\Longrightarrow$ $\boxed{\lambda_1'(x)\, u_1(x) + \lambda_2'(x)\, u_2(x) = 0}$ $\forall x \in I$

e posto $v(x) = \lambda_1(x)\, u_1(x) + \lambda_2(x)\, u_2(x)$ si ha $\quad v''(x) - \left[a_1(x)\, v'(x) + a_0(x)\, v(x)\right] = b(x)$

$\Rightarrow$

$$v'(x) = \lambda_1(x)\, u_1'(x) + \lambda_2\, u_2'(x)$$

$$v''(x) = \lambda_1'(x)\, u_1'(x) + \lambda_1(x)\, u_1''(x) + \lambda_2'(x)\, u_2'(x) + \lambda_2(x)\, u_2''(x)$$

$$\lambda_1' u_1' + \lambda_1 u_1'' + \lambda_2' u_2' + \lambda_2 u_2'' - a_1 \lambda_1 u_1' - a_1 \lambda_2 u_2' - a_0 \lambda_1 u_1 - a_0 \lambda_2 u_2 \overset{?}{=} b(x)$$

$$\lambda_1 \Big[\underbrace{u_1'' - a_1 u_1' - a_0 u_1}_{=0}\Big] + \lambda_2 \Big[\underbrace{u_2'' - a_1 u_2' - a_0 u_2}_{=0}\Big] + \lambda_1' u_1' + \lambda_2' u_2' \overset{?}{=} b(x)$$

$L(u_1) = 0$ $\qquad$ $L(u_2) = 0$

Stiamo cercando λ_1 e λ_2 tali che

$$\begin{cases} \lambda_1'(x)\, u_1(x) + \lambda_2'(x)\, u_2(x) = 0 \\ \lambda_1'(x)\, u_1'(x) + \lambda_2'(x)\, u_2'(x) = b(x) \end{cases} \qquad \forall x \in I$$

sistema di due equazioni algebriche nelle variabili $\lambda_1'(x)$ e $\lambda_2'(x)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} u_1(x) & u_2(x) & 0 \\ u_1'(x) & u_2'(x) & b(x) \end{array} \right)$$

Teorema di Rouché - Capelli

le soluzioni si possono rappresentare come

$$\lambda_1'(x) = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & u_2(x) \\ b(x) & u_2'(x) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix}} = -\frac{1}{W(x)} u_2(x) b(x)$$

$$\lambda_2'(x) = \frac{\det \begin{pmatrix} u_1(x) & 0 \\ u_1'(x) & b(x) \end{pmatrix}}{W(x)} = \frac{1}{W(x)} u_1(x) b(x)$$

integriamo fra x_0 e x

$$\lambda_1(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{W(s)} \Big(-u_2(s)\, b(s) \Big)\, ds \qquad \lambda_2(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{W(s)} \Big(u_1(s)\, b(s) \Big)\, ds$$

$$v(x) = \lambda_1(x)\, u_1(x) + \lambda_2(x)\, u_2(x)$$

$$v(x) = \int_{x_0}^{x} b(s) \underbrace{\left[\frac{-u_2(s)\, u_1(x) + u_1(s)\, u_2(x)}{W(s)} \right]}_{K(x,s)} ds = \int_{x_0}^{x} K(x,s)\, b(s)\, ds$$

$$K(x,s) = \frac{\det \begin{pmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u_1(x) & u_2(x) \end{pmatrix}}{W(s)}$$

Es: $\begin{cases} y'' + y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \\ y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$

(H) $y'' + y = 0$

(C) $y'' + y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

$$\int_{\pi/2}^{x} \left(\frac{\cos s}{\operatorname{sen} s} \operatorname{sen} x - \cos x \right) ds$$

$$\operatorname{sen} x \int_{\pi/2}^{x} \frac{\cos s}{\operatorname{sen} s} ds$$

$\log|\operatorname{sen} s|$

(H) determiniamo $\operatorname{Ker} L = \operatorname{span}\{y_1, y_2\}$ $\quad y_1'' = -y_1$? $\quad y_1(x) = \cos x$

$y_2(x) = \operatorname{sen} x$

$u_1 = \cos x$

$u_2 = \operatorname{sen} x$

$$y_p(x) = \int_{\pi/2}^{x} K(x,s) \cdot \overbrace{\frac{1}{\operatorname{sen} s}}^{b(s)} ds = \int_{\pi/2}^{x} (\cos s \operatorname{sen} x - \cos x \operatorname{sen} s) \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} s} ds =$$

$$K(x,s) = \frac{1}{W(s)} \det \begin{pmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u_1(x) & u_2(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos s & \operatorname{sen} s \\ \cos x & \operatorname{sen} x \end{pmatrix} = \cos s \operatorname{sen} x - \cos x \operatorname{sen} s$$

$$W(s) = \det \begin{pmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u_1'(s) & u_2'(s) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos s & \operatorname{sen} s \\ -\operatorname{sen} s & \cos s \end{pmatrix} = 1$$

$$= \operatorname{sen}x \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \underbrace{\frac{\cos s}{\operatorname{sen} s}}_{\log|\operatorname{sen}s|} ds - \cos x \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} ds = \operatorname{sen}x \left(\log|\operatorname{sen}x| \right) - \cos x \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$$

vicino $0, \frac{\pi}{2}$ $\quad \operatorname{sen}(x) > 0$

$$y_p(x) = \operatorname{sen}x \cdot \log(\operatorname{sen}x) + \cos x \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

La generica soluzione di (C) è $u + y_p$ con $u \in \operatorname{Ker} L = \operatorname{span}\{\cos x, \operatorname{sen}x\}$

$u = \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \operatorname{sen}x \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\boxed{y(x) = \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}x \cdot \log(\operatorname{sen}x) + \cos x \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}$$

$$/ S_c = \left\{ \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}x \log(\operatorname{sen}x) + \cos x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}x \log(\operatorname{sen}x) - x \cos x : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$\boxed{y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lambda_2} \Rightarrow \lambda_2 = 1$

Cerchiamo y tale che $\boxed{y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{ e } y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0}$

$$y'(x) = D\left[\lambda_1 \cos x + \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}x \log(\operatorname{sen}x) - x \cos x \right] =$$

$$= -\lambda_1 \operatorname{sen}x + \cancel{\cos x} + \cos x \log(\operatorname{sen}x) + \cancel{\operatorname{sen}x} \cdot \frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\operatorname{sen}x}} - \cancel{\cos x} + x \operatorname{sen}x$$

$$0 = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\lambda_1 + \frac{\pi}{2} \qquad \lambda_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$y(x) = \frac{\pi}{2} \cos x + \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}x \log(\operatorname{sen}x) - x \cos x$$