$$L(y) = y^{(N)} - a_{N-1} y^{(N-1)} - \dots - a_0 y \qquad (C)\ L(y) = b \qquad (H)\ L(y) = 0$$

$$\boxed{\operatorname{Ker} L = \operatorname{span}\{u_1, u_2, \dots u_N\}} \qquad S_c = \operatorname{Ker} L + \{y_p\} \quad y_p \text{ sol. particolare di } (C)$$

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,s)\, b(s)\, ds \qquad K(x,s) = \frac{1}{W(s)} \cdot \det\begin{pmatrix} u_1(s) & \cdots & u_N(s) \\ u_1(x) & \cdots & u_N(x) \end{pmatrix}$$

Problema: $\boxed{\text{determinare una base di } \operatorname{Ker} L}$

Lo faremo nel caso più semplice in cui $\boxed{a_i}$ sono costanti $\in \mathbb{R}$

Eq. diff. ord. lineari a coefficienti costanti di ordine N

$$y^{(n)} = a_{N-1} y^{(N-1)} + \dots + a_0 y + b(x) \qquad a_k \in \mathbb{R} \quad \forall k = 0, \dots, N-1 \qquad b \in C(I)$$

$N = 1 \qquad y' = a y \qquad \{e^{ax}\}$ base di $\operatorname{Ker} L$

$N = 2 \quad ?$

$N = 2$

$$\boxed{y'' - a_1 y' - a_0 y = 0}$$

consideriamo il polinomio caratteristico associato all'equazione

$$\lambda^2 - a_1 \lambda - a_0 = 0 \qquad -a_0 = \alpha\beta \quad -a_1 = -\alpha-\beta$$

$$\underbrace{(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)} = 0$$

sono $\underline{\alpha, \beta \in \mathbb{C}}$ sono zeri del polinomio

$$\underbrace{\left(\frac{d}{dx}-\alpha\right)\left(\frac{d}{dx}-\beta\right)}_{?}$$

$$\left(\frac{d}{dx}-\beta\right) : C^1(I) \to C^0(I)$$

$$\left(\frac{d}{dx}-\beta\right) u = u' - \beta u$$

$$\left(\frac{d}{dx}-\alpha\right)\left[\left(\frac{d}{dx}-\beta\right)(u)\right] =$$

$$= \left(\frac{d}{dx}-\alpha\right)(u'-\beta u) = u'' - \beta u' - \alpha u' + \alpha\beta u =$$

$$= u'' - (\alpha+\beta) u' + \alpha\beta u =$$

$$= u'' - a_1 u' - a_0$$

Considero le equazioni $\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right) u = 0$ $\quad u' - \alpha u = 0 \quad u(x) = e^{\alpha x}$

$\left(\frac{d}{dx} - \beta\right) u = 0 \quad u' - \beta u = 0 \quad u(x) = e^{\beta x}$

L'equazione $y'' - a_1 y' - a_0 y = 0$ ha soluzioni $u_1(x) = e^{\alpha x}$ e $u_2(x) = e^{\beta x}$

dove α e β sono zeri del polinomio caratteristico $\lambda^2 - a_1\lambda - a_0$.

La cosa funziona se $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$(\lambda-1)(\lambda+2) = \lambda^2 + \lambda - 2 \qquad y'' + y' - 2y = 0 \qquad \{e^{x}, e^{-2x}\}$

$$\begin{vmatrix} e^{x} & e^{-2x} \\ e^{x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} \quad x=0 \quad \det\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

se $\alpha = \sigma + i\eta$ $\quad \beta = \sigma - i\eta$

$$u_1(x) = e^{\alpha x} \qquad u_2(x) = e^{\beta x} = e^{\sigma x} e^{-i\eta x} = e^{\sigma x}\left(\cos(\eta x) - i \operatorname{sen}(\eta x)\right)$$

$$= e^{\sigma x} e^{i\eta x} = e^{\sigma x}\left(\cos(\eta x) + i \operatorname{sen}(\eta x)\right)$$

cerco funzioni a valori reali!

considero $\quad v_1(x) = \frac{1}{2}\left(u_1(x) + u_2(x)\right) = e^{\sigma x}\cos(\eta x)$

$$v_2(x) = \frac{1}{2i}\left(u_1(x) - u_2(x)\right) = e^{\sigma x}\operatorname{sen}(\eta x)$$

ho ottenuto la mia base $\{v_1, v_2\}$

Caso $\alpha = \beta \in \mathbb{R}$ $\quad \left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right) = 0$ $\qquad u_1(x) = e^{\alpha x}$

Una seconda soluzione è $u_2(x) = x\, e^{\alpha x}$

$$u_2'(x) = e^{\alpha x} + \alpha x\, e^{\alpha x}$$

$$y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0$$

$$u_2''(x) = 2\alpha\, e^{\alpha x} + \alpha^2 x\, e^{\alpha x}$$

$$u_2''(x) - 2\alpha u_2' + \alpha^2 u_2 = \left(\cancel{2\alpha\, e^{\alpha x}} + \alpha^2 x\, e^{\alpha x}\right) - \cancel{2\alpha\, e^{\alpha x}} - 2\alpha^2 x\, e^{\alpha x} + \alpha^2 x\, e^{\alpha x} = 0$$

base $\{ e^{\alpha x}, x\, e^{\alpha x} \}$ $\quad \forall x$

Caso generale $\quad y^{(n)} - a_{n-1} y^{(n-1)} - \cdots - a_0 y = 0$

considero il polinomio caratteristico $\quad \lambda^n - a_{n-1} \lambda^{n-1} - \cdots - a_0$

Per ogni zero λ del polinomio caratteristico si ha

- se α è zero reale semplice $\quad e^{\alpha x}$ è soluzione
- se α è zero reale di molteplicità k, le funzioni $e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x}$ sono soluzioni
- se $\alpha = \sigma + i\eta$ è zero (e quindi anche $\sigma - i\eta$) con $\eta \neq 0$, semplice; allora $e^{\sigma x} \cos(\eta x)$ e $e^{\sigma x} \operatorname{sen}(\eta x)$ sono soluzioni
- ~~se~~ $\sigma \pm i\eta$ sono zeri con $\eta \neq 0$ di molteplicità k, allora sono soluzioni le funzioni $e^{\sigma x} \cos(\eta x), e^{\sigma x} \operatorname{sen}(\eta x), x e^{\sigma x} \cos(\eta x), x e^{\sigma x} \operatorname{sen}(\eta x), \dots, x^{k-1} e^{\sigma x} \cos(\eta x), x^{k-1} e^{\sigma x} \operatorname{sen}(\eta x)$

Si ottengono n funzioni linearmente indipendenti.

Esempio $\boxed{y'' + 3y = 2\cos x}$

(H) $y'' + 3y = 0$

$\lambda^2 + 3 = 0 \qquad \lambda = \pm i\sqrt{3} \qquad u_1(x) = \cos(\sqrt{3}x) \qquad u_2(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{3}x)$

$\operatorname{Ker} L = \{ \lambda_1 \cos(\sqrt{3}x) + \lambda_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3}x) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$

Cerchiamo una soluz. particolare di (C) $\quad u_1'(x) = -\sqrt{3}\operatorname{sen}(\sqrt{3}x) \quad u_2'(x) = \sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x)$

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}x) & \operatorname{sen}(\sqrt{3}x) \\ -\sqrt{3}\operatorname{sen}(\sqrt{3}x) & \sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x) \end{pmatrix} = \sqrt{3} \qquad K(x,s) = \frac{1}{\sqrt{3}} \det\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}s) & \operatorname{sen}(\sqrt{3}s) \\ \cos(\sqrt{3}x) & \operatorname{sen}(\sqrt{3}x) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos(\sqrt{3}s)\operatorname{sen}(\sqrt{3}x) - \cos(\sqrt{3}x)\operatorname{sen}(\sqrt{3}s) \right)$$

??

$$y_p(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{sen}(\sqrt{3}x) \cdot 2\cos(\sqrt{3}s)\cos(s) \right) ds - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cos(\sqrt{3}x) \cdot 2\operatorname{sen}(\sqrt{3}s)\cos(s) \right) ds$$

Un modo più semplice

$$y'' + 3y = 2\cos x$$

$$y_p(x) = \cos x \quad !!!$$

$$y_p(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}(\sqrt{3}x)$$

$$x \cdot [\quad]$$

Metodo di somiglianza

$$y'' + 3y = 2\cos(\sqrt{3}x)$$

$$y_p(x) = a\cos(\sqrt{3}x) + b\operatorname{sen}(\sqrt{3}x)$$

$$y_p'(x) = -\sqrt{3}a\operatorname{sen}(\sqrt{3}x) + \sqrt{3}b\cos(\sqrt{3}x)$$

$$y_p''(x) = -3a\cos(\sqrt{3}x) - 3b\operatorname{sen}(\sqrt{3}x)$$

$$\underbrace{[-3a\cos(\sqrt{3}x) - 3b\operatorname{sen}(\sqrt{3}x)] + 3[a\cos(\sqrt{3}x) + b\operatorname{sen}(\sqrt{3}x)]} = 2\cos(\sqrt{3}x)$$

Non è possibile trovare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $=0$!!!

$y_p(x) = a\cos\ldots + b\operatorname{sen}\ldots$ sia soluzione

Metodo di somiglianza per la determinazione di una soluzione particolare di una equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti di ordine N nel caso di termini noti di tipo polinomiale / esponenziale / trigonometrico

$Ly = b$

Sia $b(x) = \underline{P(x)\, e^{\alpha x}}$ $P(x)$ polinomio di grado k; α <u>non</u> è uno zero del polinomio caratteristico dell'equazione omogenea $Ly = 0$; allora esiste una soluzione particolare di (C) del tipo $y_p(x) = Q(x)\, e^{\alpha x}$ dove $Q(x)$ è un polinomio di grado $\leq k$.

se α è uno zero del polinomio caratteristico, di molteplicità m, sarà

$$y_p(x) = x^m\, Q(x)\, e^{\alpha x}$$

Sia $b(x) = e^{\sigma x}\left(P_1(x)\cos(\eta x) + P_2(x)\,\text{sen}(\eta x)\right)$ P_1, P_2 polinomi di grado $\leq k$, $\sigma \pm i\eta$ non sono zeri del polinomio caratteristico di $Ly=0$ allora esiste una soluzione particolare di (C) del tipo

$$y_p(x) = e^{\sigma x}\left(Q_1(x)\cos(\eta x) + Q_2(x)\,\text{sen}(\eta x)\right)$$

dove Q_1, Q_2 sono polinomi di grado $\leq k$;

se $\sigma \pm i\eta$ sono zeri di molteplicità m allora si ha

$$y_p(x) = x^m e^{\sigma x}\left(Q_1(x)\cos(\eta x) + Q_2(x)\,\text{sen}(\eta x)\right)$$

Esempio

$$\begin{cases} y'' + 3y = \operatorname{sen} x + \cos x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \qquad y'' + 3y = 0 \qquad \begin{array}{l} u_1(x) = \cos(\sqrt{3}x) \\ u_2(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{3}x) \end{array}$$

$$\pm i\sqrt{3}$$

$$\underbrace{e^{0\cdot x}\left(P_1(x)\cos x + P_2(x)\operatorname{sen} x\right)}_{P_i \text{ polinomi di grado } 0}$$

$$y_p(x) = a\cos x + b\operatorname{sen} x$$

$$y_p'(x) = -a\operatorname{sen} x + b\cos x \qquad y''_p(x) = -a\cos x - b\operatorname{sen} x$$

$$(-a\cos x - b\operatorname{sen} x) + 3(a\cos x + b\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x + \cos x$$

$$2a\cos x + 2b\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x + \cos x \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2} \quad b = \frac{1}{2}$$

$$y_p(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$$

$$y(x) = \lambda_1\cos(\sqrt{3}x) + \lambda_2\operatorname{sen}(\sqrt{3}x) + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x \qquad 1 = y(0) = \lambda_1 + \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \frac{1}{2}}$$

$$y'(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}(\sqrt{3}x) + \sqrt{3}\lambda_2\cos(\sqrt{3}x) - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\cos x \qquad 0 = y'(0) = \sqrt{3}\lambda_2 + \frac{1}{2} \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$y(x) = \frac{1}{2}\cos(\sqrt{3}x) - \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{sen}(\sqrt{3}x) + \frac{1}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x)$$

$$y'' + 3y = \underbrace{2\cos x + x}$$

$$y_p(x) = \cos x + \frac{1}{3}x$$

$$y'' + 3y = 2\cos x \qquad y(x) = \cos x$$

$$y'' + 3y = x \qquad y(x) = \frac{1}{3}x$$

Principio di sovrapposizione: consideriamo (1) $Ly = b_1$ (2) $Ly = b_2$

(3) $L(y) = b_1 + b_2$

Se u_1 è soluzione di (1) e u_2 è soluzione di (2) allora $u_1 + u_2$ è soluzione di (3)

$$L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2) = b_1 + b_2 \;//$$

Es: $\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^x + x^2 \\ y(0) = 6 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

$Ly = x^2$ $\quad y_p(x) = ax^2 + bx + c$

$y_p'(x) = 2ax + b \quad y_p''(x) = 2a$

$2a - 2(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = x^2$

$\boxed{2a - 4ax - 2b + ax^2 + bx + c = x^2}$

(H) $\quad y'' - 2y' + y = 0 \qquad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \qquad (\lambda - 1)^2 = 0 \qquad \lambda = 1$ soluzione doppia

$a = 1 \quad -4a + b = 0 \quad b = 4$

$2a - 2b + c = 0$

$2 - 8 + c = 0$

$c = 6$

$\ker L = \{ e^x, xe^x \}$

— o —

$Ly = e^x$ $\qquad e^{1\cdot x}$ 1 è zero doppio del polinomio caratteristico associato alla equazione omogenea, quindi

$y_p(x) = x^2 \cdot a e^x \qquad y_p'(x) = 2x a e^x + x^2 a e^x \qquad y_p''(x) = 2ae^x + 4xae^x + x^2 a e^x$

$y'' - 2y' + y = a\cancel{e^x}[x^2 + 4x + 2] - 2a\cancel{e^x}[x^2 + 2x] + a\cancel{e^x}x^2 = \cancel{e^x}$

$a[\cancel{x^2} + 4x + 2 - \cancel{2x^2} - 4x + \cancel{x^2}] = 1 \qquad a = 1/2 \qquad y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 e^x$

$y_p(x) = x^2 + 4x + 6$

$$y'' - 2y' + y = e^x + x^2 \qquad u_2 = e^x \quad u_2 = x e^x$$

$$y_p(x) = \frac{1}{2} x^2 e^x + x^2 + 4x + 6$$

$y(0) = 6$

$y'(0) = 0$

$$y(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x + x^2 + 4x + 6$$

$$6 = y(0) = \lambda_1 + 6 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0$$

$$y'(x) = \lambda_2 e^x + \lambda_2 x e^x + x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x + 2x + 4$$

$$0 = y'(0) = \lambda_2 + 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = -4$$

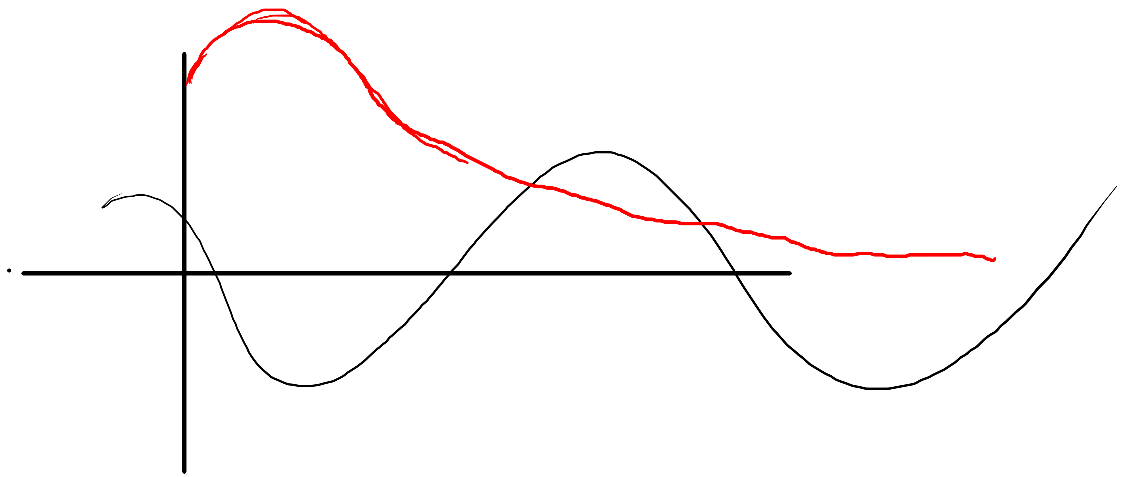
$$\boxed{y(x) = -4 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x + x^2 + 4x + 6}$$

Es: l'oscillatore armonico

caso ideale $\quad my'' = -Ky \qquad y = y(t)$

$$y'' + \frac{K}{m} y = 0 \qquad \lambda^2 + \frac{K}{m} \qquad \pm i\sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\cos(\omega t), \ \sin(\omega t) \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$



caso smorzato

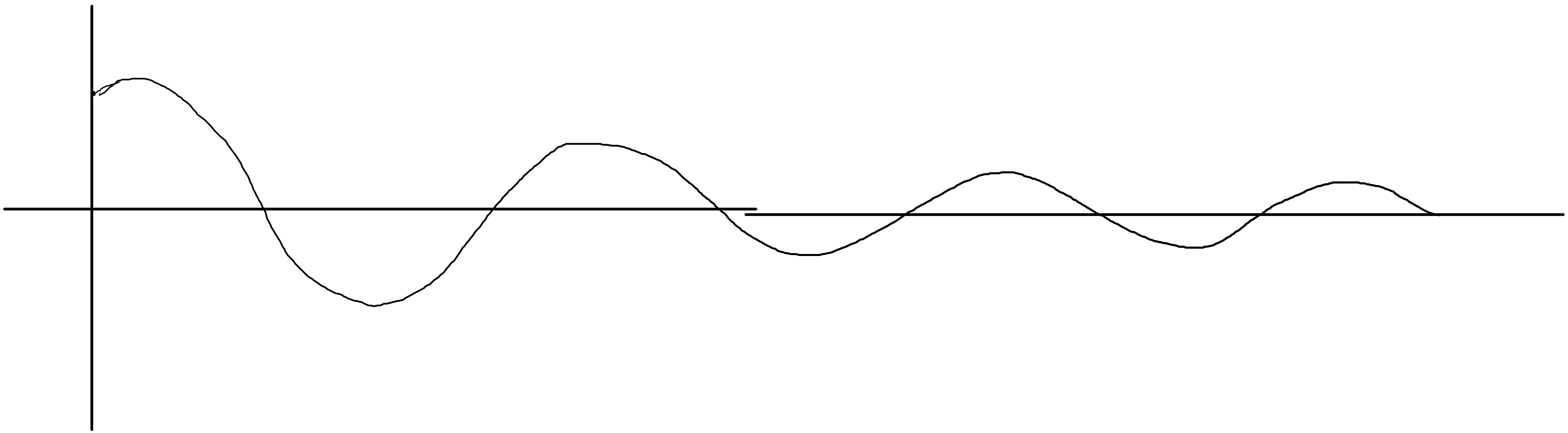
$$y'' + a y' + b y = 0$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \qquad \frac{-a \pm \sqrt{\overbrace{a^2 - 4b}^{\Delta}}}{2}$$

$$\Delta > 0 \qquad \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2} \qquad \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$e^{\lambda_1 t}, \ e^{\lambda_2 t}$$

$\Delta < 0$ $\qquad \dfrac{-a \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$ $\qquad e^{-\frac{a}{2}t}\cos(\omega t) \qquad e^{-\frac{a}{2}t}\sin(\omega t)$



Caso forzato semplice $\qquad \omega > 0 \quad \phi > 0$

$$y'' + \omega^2 y = \varphi(t) \qquad \varphi(t) = A\cos(\phi t)$$

$$u_1 = \cos(\omega t) \qquad u_2 = \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$\boxed{y_p(t) = a\cos(\phi t) + b\operatorname{sen}(\phi t)}$$

$$y_p'(t) = -\phi a \operatorname{sen}(\phi t) + \phi b\cos(\phi t) \qquad y_p''(t) = -\phi^2 a\cos(\phi t) - \phi^2 b\operatorname{sen}(\phi t)$$

$$-\phi^2 a\cos(\phi t) - \phi^2 b\operatorname{sen}(\phi t) + \omega^2 a\cos(\phi t) + \omega^2 b\operatorname{sen}(\phi t) = A\cos(\phi t)$$

$$\left[(\omega^2 - \phi^2)a - A\right]\cos(\phi t) + (\omega^2 - \phi^2)b\operatorname{sen}(\phi t) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\omega^2 - \phi^2)a = A \\ (\omega^2 - \phi^2)b = 0 \end{cases}$$

caso $\omega \neq \phi \Rightarrow a = \dfrac{A}{\omega^2 - \phi^2}, \quad b = 0$

caso $\omega = \phi$? $\Rightarrow y_p(t) = t\left[a\cos(\omega t) + b\operatorname{sen}(\omega t)\right]$