

Corso di GEOMETRIA - Prova scritta
A.A. 2018/2019 - 14 gennaio 2019
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome
Corso di Laurea	Matricola

- (1) Si dia la definizione di sottospazio somma di due sottospazi vettoriali. Si enunci e si dimostri la Formula di Grassmann per due sottospazi vettoriali.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 - x_3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica \mathcal{E} di \mathbb{R}^3 .

(b) Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e un sua base e la dimensione di $\text{Im} f$ e una sua base.

(c) Sia $W \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale di equazione cartesiana

$$x_2 = 0.$$

Si determini una base del sottospazio $W + \text{Im} f \subset \mathbb{R}^3$.

(d) Si consideri il sistema lineare

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Si dica se il sistema è compatibile e in caso affermativo si esprima la sua generica soluzione.

(3) Si consideri la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Si determini il polinomio caratteristico di $L_B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

- Si trovi una base ortonormale di autovettori.

- Si scriva la matrice diagonale D di L_B nella base di autovettori trovata.

- (4) Si trovino delle equazioni cartesiane e parametriche del piano H di $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ passante per il punto $Q = (0, 7, 1)$ e contenente la retta r di equazioni

$$\begin{cases} 3x + y + z = 4 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases} .$$

Inoltre, si consideri la retta r' di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 \\ z = t \end{cases} .$$

Si determini la posizione reciproca delle rette r ed r' .