Corso di GEOMETRIA - Prova scritta
A.A. 2019/2020 - 8 gennaio 2020
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome
BEORCHIA	VALENTINA

(1) (5 punti) Si scriva la definizione di matrice invertibile. Si scriva la formula per la matrice inversa per mezzo della matrice dei cofattori.

Si dimostri che una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{K})$ è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x-z \\ -y \end{pmatrix}$.

(a) (3 punti) Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) (4 punti) Si determinino le dimensioni di $\ker f$ e di $\mathrm{Im} f$, una base di $\ker f$ e una base di $\mathrm{Im} f$.

$2 = \mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg} f = \dim \mathrm{Im} f$, $\dim \ker f = 3 - \mathrm{rg} f = 3 - 2 = 1$

$\mathrm{Im} f = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, una sua base è $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

Eq. di $\ker f$: $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \ker f = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

(c) (3 punti) Si dica se $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$ sono in somma diretta in $\mathbb{R}^3$.

$v \in \ker f \cap \mathrm{Im} f \iff v = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$v \overset{!}{=} a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\iff a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$; ma i vettori

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow a = 0, b = 0, c = 0$

$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \ker f \cap \mathrm{Im} f = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ e quindi sono in somma diretta

(d) (3 punti) Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ si ha che il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f$.

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

$\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix} \iff c_2 = 0, \quad c_1 = a$

$\Rightarrow$ Ogni vettore del tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f$, $\forall a \in \mathbb{R}$

(e) (4 punti) Si determini il polinomio caratteristico di f e il suo spettro.

$$p_f(x) = \det(A - x\,\mathbb{I}_3) = \det \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 \\ 1 & -x & -1 \\ 0 & -1 & -x \end{pmatrix} = (-x) \cdot \det \begin{pmatrix} -x & -1 \\ -1 & -x \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -x \end{pmatrix}$$

$$= (-x) \cdot (x^2 - 1) - (-x) = (-x)(x^2 - 2) = (-x)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

$Sp(f) = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

(f) (4 punti) Si trovi una base ortonormale di autovettori per f.

$V_0 = \ker f = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$, $V_0 = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right)$

$V_{\sqrt{2}}$ ha eq. $\begin{cases} -\sqrt{2}\,x + y = 0 \\ -y - \sqrt{2}\,z = 0 \end{cases} \Rightarrow V_{\sqrt{2}} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+2+1} = 2$

$V_{\sqrt{2}} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right)$

$V_{-\sqrt{2}}$ ha eq. $\begin{cases} \sqrt{2}\,x + y = 0 \\ -y + \sqrt{2}\,z = 0 \end{cases} \Rightarrow V_{-\sqrt{2}} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right)$

Base ortonormale di autovettori $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}$

(3) (a) (4 punti) Si trovi un' equazione cartesiana del piano H di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per il punto
$Q = (-1, 0, -1)$ e ortogonale alla retta r di equazioni cartesiane

$$r: \qquad \begin{cases} z - x & = 2 \\ x + y & = 1 \end{cases}.$$

Un vettore di direzione di r è dato da $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Se H ha eq. $ax+by+cz=d$, il vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ è ortogonale a H

Quindi $H \perp r \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ è proporzionale a $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; possiamo prenderli uguali, perchè $ax+by+cz=d$ è determinata a meno di un fattore di proporzionalità: $H: -x+y-z=d$. Impongo passaggio per Q:

$$-(-1)+0-(-1)=d \implies d=2$$

$$\implies H: -x+y-z=2$$

(b) (3 punti) Si determini la posizioni reciproca delle rette

$$r: \quad \begin{cases} x = & t \\ y = & 1-t \\ z = & 2-t \end{cases} \qquad r': \quad \begin{cases} x = & \tau \\ y = & 1+\tau \\ z = & 2+\tau \end{cases}$$

Giacitura di r: $W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, giacitura di r': $W' = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$; i due vettori NON sono proporzionali $\implies$ le giaciture sono diverse $\implies$ le due rette NON sono parallele.

Inoltre: oss. che $(0,1,2) \in r$ per $t=0$
$(0,1,2) \in r'$ per $\tau=0$

$\implies r$ e r' sono incidenti