Lezione 18 dicembre 2020

mercoledì 27 novembre 2019 11:16

MATRICI DI CAMBIO DI BASE

Supp. di avere V sp. vettoriale e 2 sue basi:

$\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$

Pb: Date le coordinate di $v \in V$ nella $\mathcal{B}$, trovare le coordinate di v nella $\mathcal{B}'$.

cons. $Id_V : \overset{\mathcal{B}}{V} \longrightarrow \overset{\mathcal{B}'}{V}$ OPERATORE IDENTITÀ

$Id_V(v) = v$ AD OGNI VETTORE ASSOCIA IL VETTORE STESSO

e cons.

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(Id_V) = \left(\begin{array}{c} \text{coordinate} \\ \text{dei vettori di } \mathcal{B} \\ \text{nella base } \mathcal{B}' \end{array}\right) \begin{array}{c} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{array}$$

MATRICE
di CAMBIO BASE
o PASSAGGIO

$v_1 = Id(v_1) \; \cdots \; Id(v_n) = v_n$

dove:

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{B}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$

Per costruzione: se v ha coord. $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ in $\mathcal{B}$

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(Id_V) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} =$ coordinate di $Id_V(v) = v$ nella $\mathcal{B}'$

Quindi: per ottenere le coordinate di v nella base $\mathcal{B}'$, basta moltiplicare la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(Id_V)$ per la colonna delle coordinate di v nella base $\mathcal{B}$.

LEMMA: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(Id_V)$ è invertibile, e si ha:

$$\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(Id)\right)^{-1} = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(Id_V)$$

Dim:

Abbiamo visto:

(stessa base per dominio e codominio)

$M^{\boxed{\mathcal{B}}}_{\boxed{\mathcal{B}}}(Id_V) = I_n$ matrice unità

Trucco: osservo che vale $Id_V = Id_V \circ Id_V$

e applico il Teorema: la matrice di una composizione è uguale al prodotto delle rispettive matrici (vedere lezione di ieri)

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(Id_V) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(Id_V \circ Id_V) = \boxed{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(Id_V)} \cdot \boxed{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(Id_V)}$$

$$= \boxed{I_n}$$

$$\begin{tikzcd} \overset{\mathcal{B}}{V} \arrow[r, "Id_V"'] & \overset{\mathcal{B}'}{V} \arrow[r, "Id_V"'] & \overset{\mathcal{B}}{V} \end{tikzcd}$$

Analogamente:

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(Id_V) = I_n = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(Id_V) \cdot M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(Id_V)$$

Vogliamo ora capire come cambia la matrice di un'applicazione lineare f se cambiamo base sia nel dominio che nel codominio:

Teorema: Sia $f: V \longrightarrow V'$ AL e siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ 2 basi di V e $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ 2 basi di V'.

Allora vale la relazione:

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(f) = M^{\cancel{\mathcal{C}}}_{\mathcal{C}'}(Id_{V'}) \cdot M^{\cancel{\mathcal{B}}}_{\cancel{\mathcal{C}}}(f) \cdot M^{\mathcal{B}'}_{\cancel{\mathcal{B}}}(Id_V)$$

Dim:

$$\begin{tikzcd}
 & v \arrow[r] & f(v) \arrow[rd, bend left] & \\
 & f : V \arrow[r] & V' \arrow[rd, "Id_{V'}"] & f(v) \\
v \arrow[ruu, bend left] & \mathcal{B} \text{ base} & \mathcal{C} \text{ base} & V' \\
V \arrow[ruu, "Id_V"] \arrow[rrru, bend right] & & & \\
 & \text{base } \mathcal{B}' & \mathcal{C}' \text{ base} &
\end{tikzcd}$$

Osserviamo che possiamo scrivere: $f = Id_{V'} \circ f \circ Id_V$;

infatti: $(Id_{V'} \circ f \circ Id_V)(v) = Id_{V'}(f(Id_V(v))) = Id_{V'}(f(v)) = f(v) \quad \forall v \in V$

passando alle matrici:

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(f) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(Id_{V'} \circ f \circ Id_V)$$

$$\boxed{= \underbrace{M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(Id_{V'})}_{\substack{\text{matrice di passaggio} \\ \text{da } \mathcal{C} \text{ a } \mathcal{C}'}} \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) \cdot \underbrace{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(Id_V)}_{\substack{\text{matrice di passaggio} \\ \text{da } \mathcal{B}' \text{ a } \mathcal{B}}}}$$

In particolare:

Cons. un operatore $f: V \to V$

e 2 basi di V: $\begin{array}{cc} \mathcal{B} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B}' & \mathcal{B}' \end{array}$

si ha: $$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(Id_V) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(Id_V)$$

$$\underbrace{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)}_{N} = \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(Id_V)}_{P^{-1}} \cdot \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)}_{=M} \cdot \underbrace{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(Id_V)}_{=P}$$

$$\boxed{N = P^{-1} \cdot M \cdot P}$$

Def: Siano $A, B \in M_n(K)$; si dicono **SIMILI** se $\exists$ una matrice invertibile P tale che

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Scriveremo: $\boxed{A \sim B}$.

LEMMA: Se $A \sim B$, si ha:

$$\det A = \det B.$$

Dim: $A \sim B \Rightarrow B = P^{-1} \cdot A \cdot P$

$$\det B = \det(P^{-1} \cdot A \cdot P) =$$

Teo. di BINET $\overset{!}{=} \det(P^{-1}) \cdot \det A \cdot \det P$

$$\overset{!}{=} \frac{1}{\det P} \cdot \det A \cdot \det P$$

$$= \frac{1}{\cancel{\det P}} \cdot \cancel{\det P} \cdot \det A = \det A$$

Def.: Dato $f: V \longrightarrow V$, posso definire $\det f := \det$ (una sua qualunque matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$)

Esempio: $p: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$p\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

canonica
↓

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

IERI: $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$: verifichiamo ora con formula:

Cerco: $\underline{M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}'}(Id_{\mathbb{R}^2})}$ e $\underbrace{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{E}}(Id_{\mathbb{R}^2})}_{\text{più facile da determinare}}$

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{E}}(Id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$: infatti nelle colonne compaiono le coordinate dei vettori di $\mathcal{B}'$ nella base $\mathcal{E}$

Ricordiamo che le coordinate di un vettore di $\mathbb{R}^n$ nella $\mathcal{E}$ base canonica = le sue componenti

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}'}(Id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Infatti: $\underline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$

$$\Rightarrow M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(p) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}'}(Id) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(p) \cdot M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{E}}(Id)$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

DIAGONALIZZAZIONE DI OPERATORI

Def: $f: V \longrightarrow V$ operatore

f si dice DIAGONALIZZABILE se $\exists\, \mathcal{B}$ base tale che

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ sia diagonale:

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{con } \lambda_i \in K$$

Si dice che $\mathcal{B}$ è una base che diagonalizza f.

OSS.: Se $\mathcal{B}$ diagonalizza f, $\mathcal{B} = \{v_1, .., v_n\}$

siccome la prima colonna è $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ $f(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n = \lambda_1 v_1$

la seconda colonna è $\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ $f(v_2) = 0 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n = \lambda_2 v_2$

$\vdots$

l'n-esima colonna è $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow$ $f(v_n) = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n = \lambda_n v_n$

Def.: $f: V \longrightarrow V$; un vettore $\boxed{v \neq 0_V}$ si dice AUTOVETTORE per f se $\exists\, \lambda \in K$ (eventualmente $\lambda = 0$) tale che

$$\boxed{f(v) = \lambda \cdot v}$$

$f(0_V) = 0_V$
$= \lambda \cdot 0_V$
$\forall \lambda \in K$

λ si dice AUTOVALORE per f,

v AUTOVETTORE RELATIVO a λ.

Def: $\boxed{\begin{aligned} Sp(f) &= \text{SPETTRO DI } f \\ &= \{\text{autovalori di } f\} \subseteq \mathbb{K} \end{aligned}}$

OSS: f è diagonalizz. $\iff \exists$ base $\mathcal{B}$
formata da
autovettori

Pb: Come trovare autovettori?

$v \neq 0 \quad \odot\ f(v) = \lambda \cdot v \qquad f: V \rightarrow V$

$f(v) - \lambda \cdot v = 0_V \quad = f(v) - \lambda \cdot Id_V(v)$

$\Updownarrow$

$\boxed{(f - \lambda \cdot Id_V)(v) = 0_V} \qquad v \neq 0$

$\Rightarrow \quad v \in \ker(f - \lambda\, Id_V)$

Def: Sia $\lambda \in Sp(f)$

$V_\lambda := \{\text{autovettori di } f \text{ relativi a } \lambda\} \cup \{\underline{0_V}\}$

$= \ker(f - \lambda\, Id_V) \subseteq V$

V_λ è un sottospazio vettoriale di V, si chiama AUTOSPAZIO RELATIVO a λ.

$\dim V_\lambda = m_g(\lambda)$

si chiama MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA DI λ $\qquad 1 \leq m_g(\lambda) \leq n$

Osservazione: Se λ è autovalore, $\exists\, v \neq 0$ autovettore, $v \in V_\lambda \Rightarrow \dim V_\lambda = m_g(\lambda) \geq 1$

D'altra parte, siccome $V_\lambda \subseteq V \Rightarrow \dim V_\lambda = m_g(\lambda) \leq \dim V = n$.

LEMMA: Autovettori relativi a autovalori diversi sono LINEARMENTE INDIPENDENTI.

Dim.: $v_1, \dots, v_n$ autovettori relativi

a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$: $\quad f(v_1) = \lambda_1 v_1$

$\vdots$

$\lambda_i \neq \lambda_j \qquad f(v_n) = \lambda_n v_n$

$\forall\, i \neq j$

Per induzione su n : $n=1$: $\lambda_1 v_1 = f(v_1)$

v_1 LIN. INDIP. $\Leftrightarrow v_1 \neq 0$: vero per def. di autovettori

Supp. vero per $n-1$, e cons.

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0 \qquad (\ast)$$

Supp. per assurdo i coeff. non tutti nulli

allora $a_n \neq 0$ (se fosse $a_n = 0$, i vettori $v_1, \dots, v_{n-1}$ sarebbero LIN. DIP.)

molt. $(\ast)$ per λ_n:

$$a_1 \lambda_n v_1 + a_2 \lambda_n v_2 + \dots + a_n \lambda_n v_n = 0 \qquad (\ast\ast)$$

d'altra parte:

per $(\ast)$: $f(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) = f(0) = 0$

$$= a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2) + \dots + a_n f(v_n) = 0$$

$$= a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 + \dots + a_n \lambda_n v_n = 0 \qquad (\ast\ast\ast)$$

$$(\ast\ast\ast) - (\ast\ast) = 0$$

$$a_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_n)}_{\substack{\neq 0 \\ \lambda_1 \neq \lambda_n}} v_1 + a_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_n)}_{\substack{\neq 0 \\ \lambda_2 \neq \lambda_n}} v_2 + \dots + a_{n-1} \underbrace{(\lambda_{n-1} - \lambda_n)}_{\substack{= 0 \\ \lambda_{n-1} \neq \lambda_n}} v_{n-1} = 0$$

$v_1, \dots, v_{n-1}$ LIN. INDIP $\Rightarrow a_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, n-1$

$\Rightarrow a_n \cdot v_n = 0$, ma $v_n \neq 0 \Rightarrow$ anche $a_n = 0$.

COROLLARIO: Se $f: V \to V$ ha n autovalori diversi, siccome gli n autovettori relativi agli n autovalori sono linearmente indipendenti, essi formano una base

$\Longrightarrow$ f è diagonalizzabile

Esempio : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$L_A = f$; $Sp(L_A) = ?$

$$A - x \cdot \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 3-x \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 3-x \end{pmatrix} = (1-x) \cdot (3-x) - 4$$

$$= x^2 - 4x - 1$$

$$\Delta = 16 + 4 = 20, \qquad {}_1x_2 = \frac{4 \mp \sqrt{20}}{2}$$

$$= 2 \mp 2\sqrt{5}$$