ESERCIZI DI GEOMETRIA, FOGLIO 10

Trieste, 19 dicembre 2020

1. Si consideri il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Sia $b : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da $b(z_1, z_2) = 2Re(z_1 z_2)$, dove Re indica la parte reale di un numero complesso.
   (1) Si dimostri che b è bilineare e simmetrica;
   (2) sia $\mathcal{B} = (1, i)$ base di $\mathbb{C}$, si calcoli $M_{\mathcal{B}}(b)$;
   (3) Sia $\mathcal{C} = (z_1, z_2)$ una generica base di $\mathbb{C}$; si verifichi che
$$\det(M_{\mathcal{C}}(b)) = (\det \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{pmatrix})^2.$$
2. Sia $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Dimostrare che A ha solo autovalori reali ed è sempre diagonalizzabile.
3. Determinare gli autovalori della matrice reale
$$A = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ k & 0 & k \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix},$$
dove h, k sono parametri. Determinare per quali valori di h, k A è diagonalizzabile e in tal caso determinare le dimensioni degli autospazi.
4. Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo che ha autovalori 1 e -3 e autospazi $\text{Aut}(1) =< e_1 + e_3, e_2 - e_4 >$, $\text{Aut}(-3) =< e_1 - e_3, 2e_1 + e_2 + e_4 >$. Scrivere la matrice che rappresenta T rispetto alla base canonica. Dire se T è diagonalizzabile o meno.
5. a) Considerare le seguenti applicazioni $< \cdot, \cdot >_j: \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ per $j = 1, 2, 3$, dove $z = (z_1, z_2), w = (w_1, w_2)$:
$$< z, w >_1 = z_1 w_1 - i z_1 w_2 + i z_2 w_1;$$
$$< z, w >_2 = \bar{z}_1 w_1 - i \bar{z}_1 w_2 - i \bar{z}_2 w_1;$$
$$< z, w >_3 = \bar{z}_1 w_1 - i \bar{z}_1 w_2 + i \bar{z}_2 w_1.$$
Di ciascuna dire se è una forma sesquilineare hermitiana, e in caso positivo dire se è un prodotto scalare e scrivere la sua matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^2$.
   b) Analogamente per le seguenti applicazioni $< \cdot, \cdot >_j: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dire di ciascuna se è bilineare simmetrica, e in caso affermativo se è un prodotto scalare:
$$< x, y >_1 = x_1^2 + x_2 y_2 - 2y_3^2;$$
$$< x, y >_2 = 2x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 3x_2 y_2 - x_1 y_3 - x_3 y_1 + 4x_3 y_3;$$
$$< x, y >_3 = x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - x_1 y_3 - x_3 y_1 + 2x_3 y_3.$$