Strato limite di Ekman (1905)

Effetti non turbolenti dello stress su una delle superfici del mezzo confinante un fluido in equilibrio geostrofico. Il mezzo confinante è perpendicolare al vettore $\bar{g}$. Quindi va bene per l'atmosfera e per il mare.

Consideriamo l'equazione per la conservazione della quantità di moto.

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -2\Omega \varepsilon_{ijk} n_j v_k - \delta_{i3} g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

a) supponiamo il fluido in equilibrio idrostatico

per $i=3$ $\quad 0 = 2\Omega \cos\phi\, u - g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$

b) lontano dalla superficie confinante il fluido è in equilibrio geostrofico

c) Lo stress (sforzo) sulla superficie confinante dipende solo dalle variazioni verticali della velocità orizzontale

Siano (u, v, w) le tre componenti della velocità rispetto ad un sistema di coordinate x, y, z dove z è la verticale

$$i) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = fv - f^* w - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$j) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -fu - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$k) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} = f^* u - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g$$

La soluzione prevede equilibrio quindi il primo membro di ogni equazione scalare si annulla.
Inoltre l'equilibrio idrostatico implica $w=0$ da cui

i) $$0 = fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

j) $$0 = -fu - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

L'equilibrio geostrofico lontano dalla superficie ~~del fondo~~ permette di riscrivere il gradiente di pressione orizzontale

$$v_g f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$u_g f = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

Ricordiamo che la soluzione geostrofica è $w=0$

$$\vec{V}_g = \frac{\hat{k}}{f}\times\vec{\nabla}p$$

Quindi le equazioni per le due componenti scalari sono

$$0 = f(v - v_g) + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$0 = -f(u - u_g) + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

La soluzione che cerchiamo sarà una perturbazione della soluzione geostrofica quindi u_g e v_g non dipendono con la quota dipende nello strato limite e la dipendenza con la verticale viene scaricata su u e v le soluzioni cercate

$$0 = f(v - v_g) + \nu\frac{\partial^2 (u - u_g)}{\partial z^2} \qquad (1)$$

$$0 = -f(u - u_g) + \nu\frac{\partial^2 (v - v_g)}{\partial z^2}$$

Definiamo una grandezza complessa V come segue

$$V = (u - u_g) + i(v - v_g)$$

Quindi dalle equazioni 1) moltiplicando la seconda per i e sommandola alla prima si ha

$$-if\left[(u-u_g) - \frac{1}{i}(v-v_g)\right] + \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[(u-u_g)+i(v-v_g)\right] = 0$$

e utilizzando la definizione di V si ha

$$-i\frac{f}{\nu} V + \frac{\partial^2 V}{\partial z} = 0$$

la cui soluzione generale è

$$V(z) = A e^{\pm i\sqrt{-i\frac{f}{\nu}}\, z}$$

e considerando che $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ si ha

$$V(z) = A e^{\mp(1+i)\sqrt{\frac{f}{2\nu}}\, z} \quad \text{se } f>0 \text{ N.H.}$$

$$V(z) = A e^{\mp(i-1)\sqrt{\frac{|f|}{2\nu}}\, z} \quad \text{se } f<0 \text{ S.H.}$$

Per determinare la soluzione consideriamo le condizioni al contorno

$$\lim_{z\to+\infty} V(z) = (u_g-u_g)+i(v_g-v_g) = 0 \Rightarrow$$

$f>0$ $V(z)=Ae^{-(1+i)\sqrt{\frac{f}{2\nu}}z}$

$f<0$ $V(z)=Ae^{(i-1)\sqrt{\frac{|f|}{2\nu}}z}$

$$\lim_{z\to 0} V(z) = -(u_g + i v_g) \Rightarrow \cancel{V(z)} = A = -(u_g+iv_g)$$

Da cui la soluzione per $u(z)$ e $v(z)$ diventa

$$V(z) = \begin{cases} Re(V(z)) = -u_g e^{-\sqrt{\frac{f}{2\nu}}z} \cos \sqrt{\frac{f}{2\nu}}\, z = u - u_g \\ Im(V(z)) = +v_g e^{-\sqrt{\frac{f}{2\nu}}z} \sin \sqrt{\frac{f}{2\nu}}\, z - v_g = v - v_g \end{cases}$$

da cui

$$u(z) = u_g - u_g e^{-\sqrt{\frac{f}{2\nu}}z} \cos \sqrt{\frac{f}{2\nu}}\, z$$

$$v(z) = \cancel{v_g} + v_g e^{-\sqrt{\frac{f}{2\nu}}z} \sin \sqrt{\frac{f}{2\nu}}\, z$$