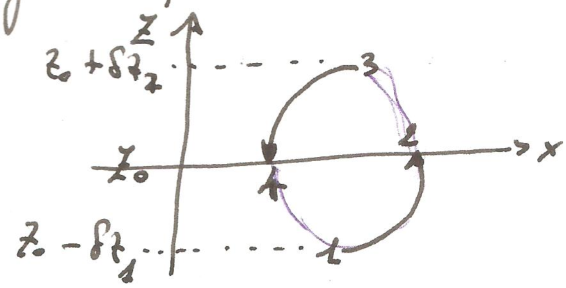
Mixing length – K theory closure – 1st order closure

Boussinesq (1897) primo approccio poi Schmidt (1925) e Prandtl (1925)

Descrizione del trasporto turbolento, in generale delle costanze, in termini di mescolamento dovuto a vortici e a perturbazioni turbolente funzioni lineari dei gradienti delle grandezze medie.

Problema Nelle equazioni di conservazione dei valori medi per moti turbolenti compaiono i flussi $\frac{\partial}{\partial x_i}(\eta' v_i')$,

Si consideri il caso monodimensionale in cui un vortice trasporta massa da due luoghi distanti ad uno di riferimento per il calcolo della statistica



Il vortice turbolento trasporta massa dal luogo 1 al luogo 2 dove si mescola con l'ambiente e dal luogo 3 al luogo 4 da cui segue il mescolamento

Calcolo $\overline{\eta' v_z'} = \frac{1}{2}\left(\eta' v_z'(1\to2) + \eta' v_z'(3\to4)\right)$

siano le deviazioni η' scrivibili come funzioni delle variazioni dei valori medi di η infatti

$$\eta(z) = \bar{\eta}(z) + \eta'(z) \qquad \text{e sia} \qquad \eta^*(z) \simeq \bar{\eta}(z_0) + \left.\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial z}\right|_{z_0}(z - z_0)$$

da cui

$$\eta'(1\to2) = \eta(z_0-\delta z_1) - \bar{\eta}(z_0) = \left.\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial z}\right|_{z_0}(-\delta z_1) \qquad \delta z_1 > 0$$

$$\eta'(3\to4) = \eta(z_0+\delta z_2) - \bar{\eta}(z_0) = \left.\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial z}\right|_{z_0}(\delta z_2) \qquad \delta z_2 > 0$$

$$\overline{\eta' v_z'} = \frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial z}\right|_{z_0}\underbrace{(-\delta z)\underbrace{v_z'(1\to2)}_{>0}}_{<0} + \left.\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial z}\right|_{z_0}\underbrace{(\delta z)\underbrace{v_z'(3\to4)}_{<0}}_{<0}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left.\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial z}\right|_{z_0}\left[\delta z_1(|v_z'(1\to2)|) + \delta z_2(|v_z'(3\to4)|)\right] = -\left.\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial z}\right|_{z}\nu_e$$

$$\overline{\eta' v_z'} = -\nu_e \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial z} \quad \text{con} \quad \nu_e > 0 \quad \text{e} \quad \nu_e = \frac{\delta z_1 |v_z'(1\to 2')| + \delta z_2 |v_z(3\to 4)|}{2} \qquad (10)$$

ν_e ha le dimensioni di una viscosità cinematica cioè

$$[\nu_e] = [L][L][t]^{-1} = [L][v]$$

Il valore della eddy viscosity ν_e deve essere misurato.
Data una velocità sturola v' è possibile definire una lunghezza tipica del trasporto turbolento ovvero la

mixing length
(Prandtl length)

$$\boxed{l = \frac{\nu_e}{v'}}$$

Quindi la K theory fornisce delle funzioni per i flussi turbolenti

$$\overline{\eta' v_i'} = -\nu_e \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_i} \qquad \nu_e > 0$$

Pertanto il trasporto turbolento si può scrivere in funzione dei gradienti dei valori medi cioè

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_i} = + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu_e \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_i}\right)$$

In questo modo il sistema di equazioni può chiudersi. La chiusura è del primo ordine in quanto sono noti tutti i termini $\overline{\eta' v_i'}$

Ricordiamo che $\boxed{\nu = 10^{-4}\, m^2 s^{-1}}$ e $\boxed{\nu_e \simeq 1\, m^2 s^{-1}}$ per l'aria nel surface layer