Esercizi Algebra 1 - 21/12/20

(annaspagnolo97@gmail.com, francesco.digiorgio@studenti.units.it)

Descrizione degli ideali di $\mathbb{Z}_n$

Ci proponiamo di studiare nel dettaglio la struttura degli ideali di $\mathbb{Z}_n$. Ci serviranno alcuni risultati parziali, che dimostreremo almeno in parte; dopodichè forniremo una descrizione "per componenti" dell'aspetto degli ideali di $\mathbb{Z}_n$ per $n \geq 2$.

Lemma 1

Siano $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Allora $MCD(n, m) = 1$ se e solo se $\mathbb{Z}_{nm} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.

Lemma 2

Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ anelli commutativi con unità. Si denoti con $A := A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ l'anello del loro prodotto cartesiano. Allora I è ideale di A se e solo se $\exists I_1, I_2, \ldots I_n$ ideali rispettivamente di $A_1, A_2, \ldots, A_n$ t.c. $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$.

Lemma 3

Sia p primo e $k \geq 1$. Allora I è ideale di $\frac{\mathbb{Z}}{p^k\mathbb{Z}}$ se e solo se $\exists\, l \in \{0, \ldots, k\}$ t.c. $I = \frac{p^l\mathbb{Z}}{p^k\mathbb{Z}}$.

Esercizio 1

Sia $n \geq 2$. Si usino i punti precedenti per dare un'espressione generale della forma di un ideale di $\mathbb{Z}_n$ come prodotto di ideali di $\mathbb{Z}_{p_j^k}$ con p_j primi opportuni.

Esercizio 2

Sia $n \geq 2$. Si determini il numero di ideali di $\mathbb{Z}_n$. Esso è in qualche modo legato al numero dei naturali che dividono n?