Lezione 22 dicembre 2020

giovedì 28 novembre 2019 11:21

Richiamo: Siamo interessati a trovare basi formate da autovettori: $v \neq 0$, $f(v) = \lambda v$; in una tale base $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale

oss.: v è autovettore $\iff f(v) - \lambda v = 0$

$\iff (f - \lambda \, \mathrm{Id}_V)(v) = 0 \implies v \in \ker(f - \lambda \, \mathrm{Id}_V)$

$V_\lambda := \ker(f - \lambda \, \mathrm{Id}_V)$ AUTOSPAZIO di λ

$m_g(\lambda) := \dim V_\lambda$; $1 \leq m_g(\lambda) \leq n = \dim V$

PRIMO CRITERIO DI DIAGONALIZZABILITÀ:

Sia $\underbrace{Sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}}_{\text{INSIEME DEGLI AUTOVALORI di } f}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$

Allora: f è diagonalizzabile $\iff$

$$\dim V_{\lambda_1} + \dots + \dim V_{\lambda_k} = n = \dim V$$

$$m_g(\lambda_1) + \dots + m_g(\lambda_k) = n$$

Inoltre: in questo caso, una base che diagonalizza f è data dall'unione di:

$\mathcal{B}_1$ base V_{λ_1}, ..., $\mathcal{B}_k$ base V_{λ_k}

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k .$$

Pb.: Come trovare $Sp(f) = ?$

oss.: $\lambda \in Sp(f) \iff \underline{\ker(f - \lambda \cdot \mathrm{Id}_V) \neq \{0_V\}}$

$\Rightarrow \boxed{f - \lambda \, Id_V}$: cons. $\boxed{M^{B}_{B}(f - \lambda \cdot Id_V):}$

non è iniettivo $\Rightarrow$ non suriettivo

matrice quadrata

$\Rightarrow$ non è isomorfismo

$$\Updownarrow$$

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f - \lambda \, Id_V)$ NON è INVERTIBILE

$$\Longleftrightarrow \det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f - \lambda \, Id_V) = 0$$

oss. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f - \lambda \, Id_V) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - \lambda \, M^{\textcircled{\mathcal{B}}}_{\textcircled{\mathcal{B}}}(Id_V)$

$$= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - \lambda \cdot \mathbb{I}_n$$

Quindi: Cons. f e una sua matrice in una base $\mathcal{B}$ qualunque; poi tolgo $\lambda \cdot \mathbb{I}_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$

OSS.: $\det\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f - \lambda \, Id_V)\right) = 0 \Longleftrightarrow$

$$\underbrace{\det\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f - x \, Id_V)\right)}_{\text{con } x \text{ incognita è un'espressione in } x} \underbrace{(\lambda)}_{\to \text{ valuta espressione in } \lambda} = 0$$

es.: $n = 2$: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f - x \cdot Id_{\mathbb{R}^2}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 3-x \end{pmatrix}$$

$$\det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f - x \cdot Id_V) = (2-x)(3-x) - 1$$

$$= x^2 - 5x + 5$$

${}_1x_2 = \dfrac{5 \mp \sqrt{5}}{2}$: $\lambda_1 = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2}$

infatti: $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix} - \frac{5-\sqrt{5}}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix}2-\frac{5-\sqrt{5}}{2} & 1\\ 1 & 3-\frac{5-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}$$

det $(- '' -) = 0$; stesso per $\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$

Es: $n=3$ $\quad M^B_B(f) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$$M^B_B(f) - x\,\mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} - x\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1-x & 0 & 0\\ 1 & -x & 1\\ 1 & 1 & -x\end{pmatrix}$$;

$\det(\dots) =$

$= (1-x)\cdot\det\begin{pmatrix}-x & 1\\ 1 & -x\end{pmatrix}$

$= (1-x)(x^2-1) = (1-x)(x-1)(x+1)$

$= -(x-1)^2\cdot(x+1)$

è un POLINOMIO DI GRADO 3

$S_p(f) = \{-1, 1\}$

Infatti: $\lambda = 1$, $\quad M^B_B(f) - 1\cdot\mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

$f : V \to V$ su campo K

$S_p(f) = \{$ autovalori di $f\} \subseteq K$

λ è autovalore $\iff f(v) = \lambda v \quad v \neq 0_V$

$\iff \det\left(M^B_B(f) - \lambda\,\mathbb{I}_n\right) = 0$

$$P_f(x) := \det\left(M^B_B(f) - x\cdot\mathbb{I}_n\right)$$

POL. CARATTERISTICO di f.

Def: $A \in M_n(K)$

$p_A(x)$ = POLIN. CARATTERISTICO di A

$p_A(x) = p_{L_A}(x) = \det(A - x\cdot \mathbb{I}_n)$

oss: $f: V \longrightarrow V$, $p_f(x) = \det\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - x\mathbb{I}_n\right)$

NON DIPENDE DALLA SCELTA DELLA BASE $\mathcal{B}$

Infatti:

$$\begin{aligned} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - x\cdot\mathbb{I}_n &= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f - x\cdot Id_V) \\ &\overset{!}{=} M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(Id_V)\cdot M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f - x\cdot Id_V)\cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(Id_V) \\ &= P^{-1}\cdot M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f - x\, Id_V)\cdot P \\ &\overset{!}{=} P^{-1}\cdot\left(M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) - x\cdot\mathbb{I}_n\right)\cdot P \end{aligned}$$

i due membri hanno lo stesso determinante!

$= p_f(x)$

oss.: • Grado di $p_f(x)$

$\text{gr } p_f(x) = n = \dim V$

e il coefficiente di x^n è : $(-1)^n$

$$p_f(x) = \det\begin{pmatrix} a_{11}-x & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}-x \end{pmatrix}$$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

es.: $n=2$ $\quad \det\begin{pmatrix} a_{11}-x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-x \end{pmatrix}$

Si può dimostrare per induzione su n.

- Il termine noto di $p_f(x)$:

$a_0 = p_f(0)$

$$p_f(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \sim + a_1 x + a_0$$

$$p_f(0) = \det\left(M_B^B(f) - \underbrace{0 \cdot \mathbb{I}_n}_{=0}\right)$$

$$= \det M_B^B(f)$$

Def: Sia $\lambda \in Sp(f)$; sappiamo che λ è radice di $p_f(x)$.

La molteplicità di λ come RADICE di $p_f(x)$ si chiama MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA di λ

Scriveremo: $m_a(\lambda)$

$$\left(\text{es. } p_f(x) = -\underbrace{(x-1)^2}\cdot(x+1)\right)$$

$$= -(x-1)\cdot(x-1)(x+1)$$

RICHIAMI:

Teorema di Ruffini:

Sia $p(x)$ polinomio in una indeterminata:

Allora: $\lambda \in K$ è radice di $p(x)$, cioè $p(\lambda) = 0$

è zero di $p(x)$

$\Longleftrightarrow$ $p(x)$ è divisibile per $(x-\lambda)$.

cioè $p(x) = (x-\lambda)\cdot g(x)$

con $g(x)$ polinomio (di grado $= gr\, p(x) - 1$).

Dim. facile: $\boxed{\Leftarrow}$ $p(x) = (x-\lambda)\cdot g(x)$

$$p(\lambda) = \underbrace{(\lambda-\lambda)}_{=0}\cdot \underline{g(\lambda)} = 0$$

$\Rightarrow$: ricordiamo che per i polinomi a coefficienti in un campo c'è l'ALGORITMO DI DIVISIONE: dati $p(x)$ e $q(x)$, si può scrivere sempre:

$p(x) = q(x)\cdot g(x) + r(x)$, dove $r(x)$ è un polinomio di grado: $gr\, r(x) < gr\, q(x)$

$g(x)$ si dice POLINOMIO QUOZIENTE, $r(x)$ si dice RESTO

Supponiamo che λ sia una radice di $p(x)$: $p(\lambda)=0$, ed eseguiamo la divisione di $p(x)$ per $(x-\lambda)$; si avrà: $p(x) = (\lambda-x)\cdot q(x) + r(x)$, dove il resto $r(x)$ verifica: $\operatorname{gr} r(x) < \operatorname{gr}(x-\lambda) = 1$

$\Rightarrow$ $\operatorname{gr} r(x) = 0$, cioè è una costante c:

$$p(x) = (x-\lambda)\cdot q(x) + c$$

Ma $0 = p(\lambda) = \underbrace{(\lambda-\lambda)}_{=0}\cdot q(\lambda) + c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow$ il resto è 0 e $(x-\lambda)$ divide $p(x)$.

Sia ora λ una radice di $p(x)$. Diremo che la radice λ ha MOLTEPLICITÀ m se

$$\boxed{\begin{array}{l}(x-\lambda)^m \text{ divide } p(x), \text{ ma} \\ (x-\lambda)^{m+1} \text{ non divide } p(x).\end{array}}$$

es.: $p_f(x) = -(x-1)^2\cdot(x+1)$

EQUIVALENTE:

$$\boxed{\begin{array}{l}p(x) = (x-\lambda)^m \cdot q(x) \\ \text{con } q(\lambda) \neq 0\end{array}}$$

Esempio: $p(x) = (x-1)^{\textcircled{2}}\cdot(x-3)^{\textcircled{1}}$

radici: $\lambda_1 = 1$, molt. $= \textcircled{2}$

$\lambda_2 = 3$, molt. $= \textcircled{1}$

TEOREMA: Sia $\lambda \in Sp(f)$

Ricordiamo $\underset{\text{MOLT. GEOMETRICA}}{m_g(\lambda)} = \dim V_\lambda = \dim \ker(f - \lambda\cdot Id_V)$

Allora vale

$$1 \le \boxed{m_g(\lambda) \le m_a(\lambda)} \le n$$

SECONDO CRITERIO DI DIAGONALIZZ.

$f: V \longrightarrow V$, V sp. vettoriale su $\mathbb{K}$

Allora f è diagonalizzabile $\Longleftrightarrow$

① $p_f(x)$ è prodotto di polinomi lineari (di grado 1) : $p_f(x) = (\lambda_1 - x)^{m_1} \cdots (\lambda_k - x)^{m_k}$

$m_1 + \dots + m_k = n$

② $\forall \lambda \in Sp(f)$ si ha:

$$\boxed{m_g(\lambda) = m_a(\lambda)}$$

es.: $x^2 + x + 1$
NON è fattorizzabile
(NON ha radici reali)
opp. $x^2 + 1$

OSS.: $K = \mathbb{C}$, la ① è SEMPRE verificata per il Teorema Fondamentale dell'Algebra.

COROLLARIO: Supp: $f: V \to V$, $\dim V = n$

f ha n autovalori DIVERSI

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$: $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$.

Allora: $p_f(x) = (\lambda_1 - x)^{①} \cdots (\lambda_n - x)^{①}$ ① ✓

è prodotto di fattori lineari

$m_a(\lambda_i) = 1 \geq m_g(\lambda_i) \geq 1$

$\Longrightarrow m_g(\lambda_i) = 1 = m_a(\lambda_i)$ ② ✓

$\Longrightarrow f$ è diagonalizzabile.

CONCLUSIONE: ISTRUZIONI PER DIAGON.:

① $f: V \to V$; fisso $\mathcal{B}$ a piacere

scrivo $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = A$ e cons. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - x \cdot \mathbb{I}_n$

calcolo $p_f(x) = \det(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - x \mathbb{I}_n)$

② Cerco tutte le radici di $p_f(x)$ con la molt. alg.

$Sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$

③ $\forall \lambda_i$, calcolo $m_g(\lambda_i) = \dim V_{\lambda_i}$

$$= \dim \ker (f - \lambda_i \, Id_V)$$

Teo. dim. $= n - rg\,(f - \lambda_i \, Id_V)$

$$\overset{!}{=} n - rg\,(A - \lambda_i \, I_n)$$

④ controllo che $\forall i$: $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$ ⊛
se non vale, f non è diagonalizz. e mi fermo.

⑤ se ⊛ vale $\forall i$, cerco una base $\boxed{\mathcal{B}_i}$ di
ogni V_{λ_i} autospazio; e poi

$$\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$$

∼∼∼ · ∼∼∼ · ∼∼∼ · ∼∼∼ · ∼∼∼ ·

Esempi :

Trovare autovalori e autospazi di

$$L_B : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

pol. caratt. :

$$p_{L_B}(x) = p_B(x) = \det(B - x \cdot I_3)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 2-x & -2 & -5 \\ 0 & -x & -4 \\ 0 & 1 & 3-x \end{pmatrix} =$$

sviluppo secondo Laplace – 1ª colonna :

$$= (2-x)\cdot \det\begin{pmatrix} -x & -4 \\ 1 & 3-x \end{pmatrix}$$

$$= (2-x)\cdot\left(-x(3-x)+4\right)$$

$$= \boxed{(2-x)\cdot\left(x^2-3x+4\right)} \quad (*)$$

una radice di $p_B(x)$ è $\lambda_1 = 2$

altre radici: radici di x^2-3x+4

$$\Delta = 9 - 4\cdot 4 = 9-16 = -5 < 0$$

NIENTE RADICI REALI

$\Rightarrow$ L_B NON è diagonalizz.

$$Sp(f) = \{2\} \subseteq \mathbb{R}$$

Autospazio relativo a $\lambda_1 = 2$: V_2

$$\dim V_2 = m_g(2) = \dim \ker\left(L_B - 2\, Id_{\mathbb{R}^3}\right)$$

$$= 3 - rg\left(L_B - 2\, Id_{\mathbb{R}^3}\right)$$

$\downarrow$

Teo. di Dim.

$$rg\left(L_B - 2\, Id_{\mathbb{R}^3}\right) = rg\left(B - 2\cdot I_3\right)$$

$$B - 2 I_3 = \begin{pmatrix} 2-2 & -2 & -5 \\ 0 & 0-2 & -4 \\ 0 & 1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$rg\,(B - 2\,\mathbb{I}_3) = 2$$

$$\Rightarrow \dim \ker (L_B - 2\,Id_{\mathbb{R}^3}) = 3 - 2 = \underline{1 = m_g(2)}$$

D'altra parte $\underline{m_a(2) = 1 = m_g(2)}$; ma L_B NON è diagon.

Esempio: $L_C : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Trovare autovalori e autospazi

$$p_C(x) = \det\,(C - x\cdot\mathbb{I}_3) = \det \begin{pmatrix} 5-x & 0 & 6 \\ 0 & 2-x & 0 \\ -3 & 0 & -4-x \end{pmatrix}$$

Sviluppo con Laplace rispetto a 2ª colonna:

$$= (2-x)\cdot \det \begin{pmatrix} 5-x & 6 \\ -3 & -4-x \end{pmatrix}$$

$$= (2-x)\cdot \big((5-x)(-4-x) + 18\big)$$

$$= (2-x)\cdot(x^2 - x - 2)$$

$$= (2-x)\,(x-2)\;x+1) = -\,(x-2)^2\cdot(x+1)$$ ① V

$Sp(L_C) = \{2, -1\}$ $\qquad m_a(2) = 2$

$$\underline{m_a(-1) = 1}$$

Oss. $\quad 1 \le m_g(-1) \le m_a(-1) = 1 \Rightarrow m_g(-1) = m_a(-1) = 1$

Rimane da determinare $m_g(2) = \dim V_2 = \dim \ker (L_C - 2\,\mathbb{I}d_{\mathbb{R}^3})$

$$= 3 - rg(L_C - 2\,\mathbb{I}d_{\mathbb{R}^3})$$

$$= 3 - 1 = 2$$

$$= m_a(2)$$

$$rg(L_C - 2\,\mathbb{I}d_{\mathbb{R}^3}) = rg(C - 2\,\mathbb{I}_3)$$

$$C - 2\,\mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$rg(C - 2\,\mathbb{I}_3) = 1$$

$m_g(2) = 2 = m_a(2) \Longrightarrow L_C$ è diagonalizz.

In una base di autovettori la matrice associata a L_C avrà la forma:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

perché $m_a(2) = 2$

Base di autovettori : $\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_{-1}$

$\mathcal{B}_2$ base di V_2 , $\mathcal{B}_{-1}$ base di V_{-1}

Ricerca di $\mathcal{B}_2$:

$$V_2 = \ker\big(\underbrace{L_c - 2\, Id_{\mathbb{R}^3}}_{\text{la sua matrice è:}}\big)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

ker: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

V_2: $3x + 6z = 0$: piano vettoriale

$x = -2z$

eq. param : $\begin{cases} x = -2s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$

$$\boxed{V_2 = \text{Span}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{base di } V_2}\Big)}$$

$= \mathcal{B}_2$

base $\mathcal{B}_{-1}$: base di V_{-1} : retta vettoriale

$$V_{-1} = \ker\Big(\underbrace{L_c - (-1)\cdot Id_{\mathbb{R}^3}}_{\text{matrice}}\Big)$$

$$C + I_3 = \begin{pmatrix} 5+1 & 0 & 6 \\ 0 & 2+1 & 0 \\ -3 & 0 & -4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

eq. di V_{-1}: $\begin{cases} 6x + 6z = 0 \\ 3y = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases}$

$x = t$:

$z = -x = -t$ $\quad$: $\quad \boxed{V_{-1} = \text{Span}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}_{-1}}\Big)}$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ base di autovettori è: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Controllo: è vero che

$$L_c\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \overset{?}{=} 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ✓$$

Matrice di passaggio:

$$P = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(Id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^3}) = P^{-1}$$

COMPITO:

Calcolare P^{-1} e verificare $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot C \cdot P$