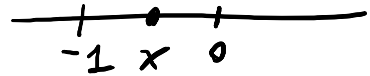
22 Dicembre

Polinomi di McLaurin di



$$\lg(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+y}\,dy =$$

$$= \int_0^x \left[\sum_{j=0}^{n} (-1)^j y^j + o(y^n) \right] dy =$$

$$= \; = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \int_0^x y^j\,dy + \int_0^x o(y^n)\,dy$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \left. \frac{y^{j+1}}{j+1} \right]_0^x + \int_0^x o(y^n)\,dy =$$

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{j+1}}{j+1} + \int_0^x o(y^n)\,dy$$

$$\log(1+x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{j+1}}{j+1} + \int_0^x o(y^n)\,dy$$

Verifichiamo che $\boxed{\int_0^x o(y^n)\,dy = o(x^{n+1})}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x o(y^n)\,dy}{x^{n+1}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{(n+1)\,x^n}$$

$$= \frac{1}{n+1} \lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0$$

$$\log(1+x) = \overbrace{\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{j+1}}{j+1}}^{P_{n+1}(x)} + o(x^{n+1})$$

$$\operatorname{artg} x = \int_0^x \frac{1}{1+y^2}\,dy =$$

$$= \int_0^x \left[\sum_{j=0}^n (-1)^j y^{2j} + o(y^{2n})\right] dy =$$

$$= \sum_{j=0}^n (-1)^j \int_0^x y^{2j}\,dy + \int_0^x o(y^{2n})\,dy$$

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1}}_{P_{2n+1}(x)} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

non e' primitivabile in $\mathbb{R}$.

<u>Dim</u> Sia per assurdo $G(x)$ una sua primitiva

$$G'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$G'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{G(x) - G(0)}{x} = \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{G'(x)}{1} = \lim_{x \to 0^+} G'(x) = \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sign}(x)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} 1 = 1 \implies \boxed{G'_d(0) = 1}$$

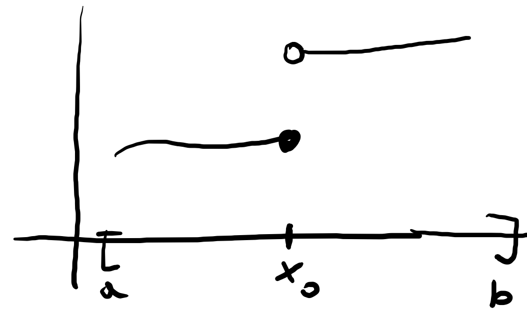
$$G'_s(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{G(x) - G(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} G'(x) = \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sign}(x)$$

$$= \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1 \implies \boxed{G'_s(0) = -1}$$

Siano $f_0(x) \in C^0([a, x_0])$ e $f_1(x) = C^0([x_0, b])$

e se pongo $\forall \; x \in [a,b]$

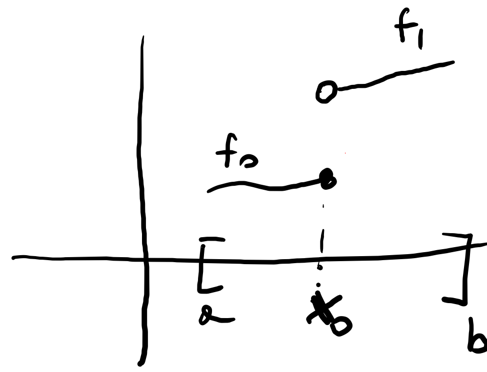
$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{per} \quad x \leq x_0 \\ f_1(x) & \quad x > x_0 \end{cases}$$



e se inoltre $f_0(x_0) \neq f_1(x_0)$

f non è primitivabile in $[a,b]$

Se per assurdo $G(x)$ è una primitiva di $f(x)$ in $[a,b]$,



$$G'_d(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0^+} G'(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

$$= \lim_{x\to x_0^+} f_1(x) = f_1(x_0)$$

$$G'_s(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^-} G'(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f_0(x)$$

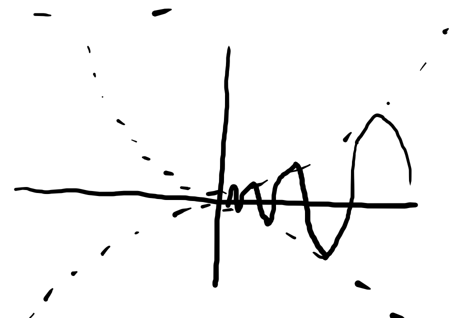
$$= f_0(x_0)$$

$\Rightarrow$ Non esiste $G'(x_0)$

Esempio $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$

è primitivabile

$G(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$



G(x) è continua in 0 $\qquad -x^2 \leq G(x) \leq x^2$

per $x \neq 0$

$$G'(x) = \left(x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\cos'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)' = 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \cancel{x^2}\left(\cancel{-}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(\frac{\cancel{-}1}{\cancel{x^2}}\right)$$

$$= 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) = g(x) + f(x) \quad \text{per } x \neq 0$$

$$G'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{G(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 =$$

$$= g(0) + f(0)$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

risulta che $g \in C^0(\mathbb{R})$

Concludiamo che $G'(x) = g(x) + f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

e dove $g \in C^0(\mathbb{R})$. Grazie al teorema fond del calcolo, so che $g(x)$ è integrabile, cioè se pongo

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt, \text{ allora } \quad F'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$G'(x) = F'(x) + f(x)$$

$$f(x) = (G-F)'(x).$$ Quindi, esiste una primitiva.

Le primitive di $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

sono date di $F(x) = \int_{x_0}^{x} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$.

Supponiamo $f(x)$ ha una primitiva che chiamerò $G(x)$.

Siccome f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, applicando il teor fond del calcolo, so che $F'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ se $x \neq 0$.

Considero la funzione $F - G \in C^0(\mathbb{R})$ $\quad F(x) = \int_{x_0}^{x} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$

$G'(x) = f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$$F'(x) - G'(x) = 0 \qquad \forall x \neq 0.$$

In particolare in $[0, +\infty) \Rightarrow$ si ha $F(x) - G(x) = c_+$

$(-\infty, 0]$ $\qquad F(x) - G(x) = c_-$

$$c_+ = \lim_{x \to 0^+} \left(F(x) - G(x)\right) = F(0) - G(0)$$

$$c_- = \lim_{x \to 0^-} \left(F(x) - G(x)\right) = F(0) - G(0)$$

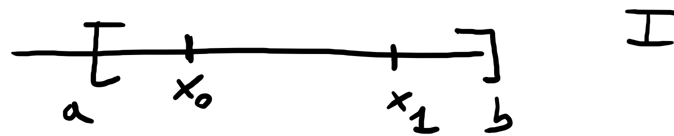
$F(x) - G(x) = F(0) - G(0) = c$

$F(x) = G(x) + c$

$\forall x \in \mathbb{R}$

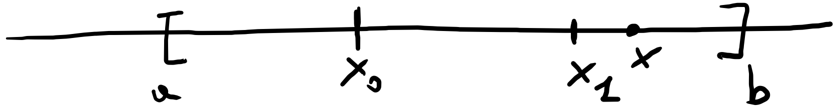
Teor Sia I un intervallo ed $f \in L_{loc}(I)$.
Sia $x_0 \in I$. Allora $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ è
$F \in C^0(I)$.

Dim Si tratta di dimostrare che $F(x)$ è continua
in ogni punto $x_1 \in I$



Considereremo un intervallo
$[a,b] \subseteq I$ che contiene al suo interno x_0, x_1
Sicuri $f \in L[a,b]$ secondo Darboux. Ma allora esiste

$M>0$ t.c. $|f(x)| \le M \quad \forall\, x \in [a,b]$



$$0 \le |F(x)-F(x_1)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt \right| =$$

$$= \left| \cancel{\int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt} + \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt - \cancel{\int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt} \right| = \left| \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt \right| \le$$

$$\le \int_{x_1}^{x} |f(t)|\,dt \le \int_{x_1}^{x} M\,dt = M\,|x-x_1| \xrightarrow{x\to x_1} 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to x_1} |F(x)-F(x_1)| = 0 \iff \lim_{x\to x_1} \left(F(x)-F(x_1)\right) = 0$$