Ortogonalità

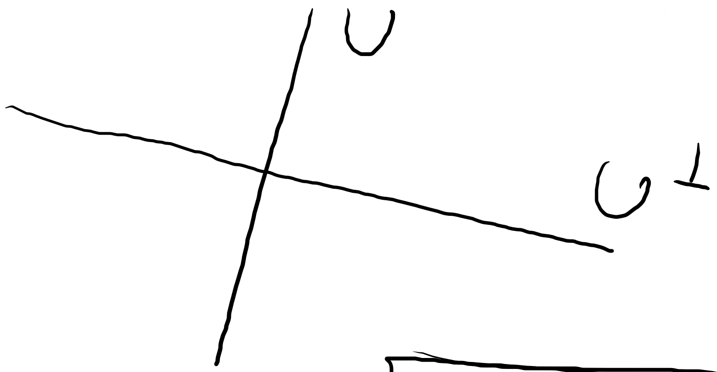
V sp. vett. $/\mathbb{R}$

V spazio vett. Euclideo ($\langle\,;\,\rangle$ bilineare simmetrica def. >0) $\dim V = n < \infty$

$U \subset V$ sottosp. vett. $\rightsquigarrow$ $U^{\perp} \overset{\text{def}}{=} \{ v \in V \mid \langle v, u\rangle = 0 \quad \forall u \in U \}$

spazio ortogonale a U

$\boxed{U^{\perp} \subset V \text{ sottosp. vett.}}$



$S \subset V$ sottoinsieme

$S \neq \emptyset$

$S^{\perp} \overset{\text{def}}{=} \{ v \in V \mid \langle v, s\rangle = 0 \quad \forall s \in S \}$

$v \in V \rightsquigarrow v^{\perp}$

$\boxed{S^{\perp} = \mathrm{span}(S)^{\perp}}$

Prop. V sp. Vett. Euclideo, $\dim V = n < \infty$, $U \subset V$ sottospazio Vett.

Allora $\boxed{\dim U^\perp = \dim V - \dim U}$ $=: \operatorname{codim} U$

Codimensione di U

Dim $r := \dim U \rightsquigarrow (u_1, \dots, u_r)$ base di $U \rightsquigarrow \mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ base di V

$v \in U^\perp \iff \langle u_i, v \rangle = 0 \quad \forall i = 1, \dots, r$

$A = M_{\mathcal{U}}(b) \quad (b = \langle , \rangle)$

$\cap$

$M_n(\mathbb{R})$ matrice simmetrica reale

OSS se $X \in \ker(A)$, $X \in \mathbb{R}^n$

$AX = 0 \Rightarrow {}^tX A X = 0$

$= \| X^{\mathcal{U}} \|^2 \Rightarrow X = 0$

$\Rightarrow \ker A = \{0\} \Rightarrow$

$\operatorname{rg} A = n \Rightarrow \det A \neq 0$

$V \ni v = X^{\mathcal{U}}$ $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ $\quad A = (a_{ij})$

$$\underline{\langle u_i, v \rangle} = \overbrace{(0, \dots, 1, \dots, 0)\, A}^{A^{(i)}}\, X = \underline{A^{(i)} X = 0} \qquad \boxed{i = 1, \dots, r}$$

$\uparrow$ i-esimo posto

$v = X^{\mathcal{U}} \in U^{\perp} \iff X$ è soluzione del sistema omogeneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

$A' = \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(r)} \end{pmatrix}$ matrice del sistema

$\boxed{\mathrm{rg}\, A' = r} \Rightarrow$ lo spazio delle sol. ha $\boxed{\dim\ n - r}$

$\uparrow$ Rouché - Capelli

$\Rightarrow \dim U^{\perp} = n - r = \operatorname{codim} U.$

$S \subset V$ sottoinsieme $\neq 0$ $\rightsquigarrow$ $\underbrace{S^\perp = (\text{Span } S)^\perp}$

Span S sottosp. vett.

$V^\perp = \{0\}$ $\quad$ $\dim(\text{Span } S) = 1 \Rightarrow \dim S^\perp = \dim V - 1$

Prop. V sp. vett. Euclideo, $\underline{\dim V < \infty}$, $U \subset V$ sottosp. vett. $\Longrightarrow$

$$\underline{(U^\perp)}^\perp = \underline{U}.$$

Dim $\dim(U^\perp)^\perp = n - \dim U^\perp = n - (n-r) = r = \dim U$

$$\begin{cases} n = \dim V \\ r = \dim U \end{cases}$$

Facciamo vedere che $\underline{U \subset (U^\perp)^\perp}$

Infatti se $u \in U$, $t \in U^\perp \Longrightarrow \langle u, t \rangle = 0 \Longrightarrow$

$u \in (U^\perp)^\perp$,

Corollario V sp. vett. euclideo, $\dim V < \infty$, $U \subset V$ sottosp. vett.

Allora $\boxed{V = U \oplus U^{\perp}}$.

Dim

1) $U \cap U^{\perp} = \{0_V\}$

infatti se $v \in U \cap U^{\perp} \Rightarrow \langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$

perché il prodotto scalare è definito positivo.

2) $\dim(U \oplus U^{\perp}) = \dim U + \dim U^{\perp}$

$= \dim V$ (per la proposizione già dimostrata)

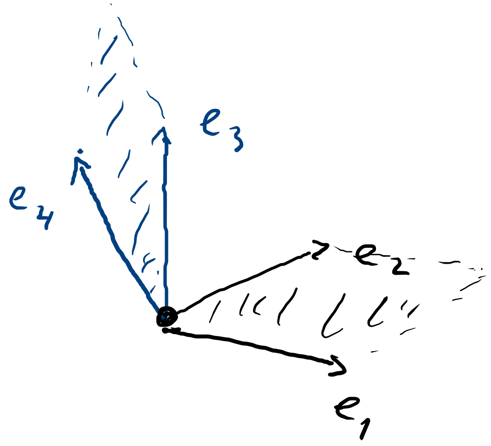
(2) $\Rightarrow U \oplus U^{\perp} = V$.

Esempio $\mathbb{R}^4$ col prodotto scalare standard

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_4 y_4$$

$E = \text{span}(e_1, e_2)$ piano vett.

$E^\perp = \text{span}(e_3, e_4)$ " "



$\dim E^\perp = 2$

V sp. vett. Euclideo, $\dim V = n$, $U \subset V$ sottospazio vett.

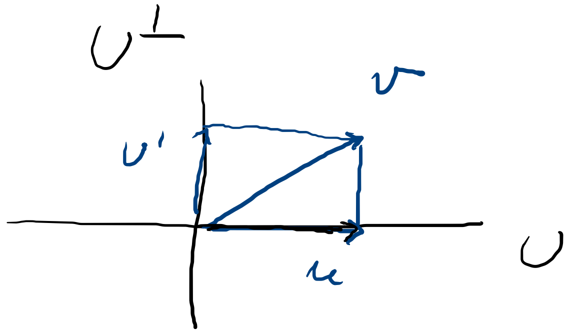
$$\boxed{V = U \oplus U^{\perp}}$$

$\forall v \in V$ si può scrivere, in modo unico, come

$$v = u + u' \quad , \text{ con } u \in U \, , \; u' \in U^{\perp}$$

proiezione ortogonale su U.

$\rightsquigarrow P_U : V \longrightarrow U$ <u>lineare</u> (*)



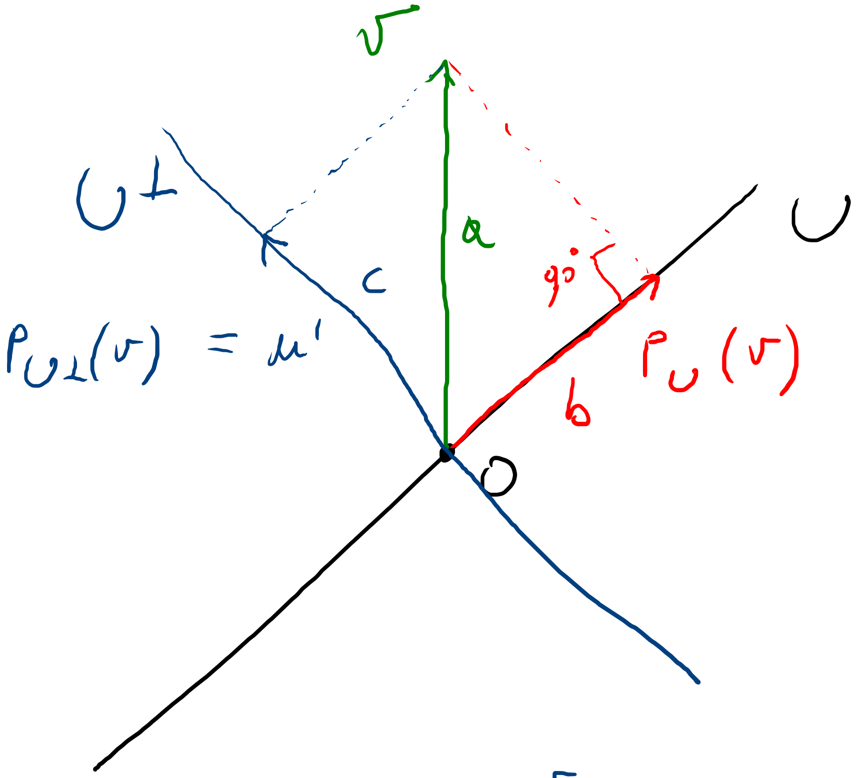
$P_U(v) = u$ se

$v = u + u'$ con $u \in U$, $u' \in U^{\perp}$

$$\boxed{P_U \text{ dipende dal prodotto scalare}}$$

$P_U(u) = u \quad \forall u \in U.$

$P_U(v)$ è detta componente di v lungo U
(o proiezione di v su U)



$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

$$v = P_U(v) + P_{U^\perp}(v) = u + u'$$

$$\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = \langle u + u', u + u'\rangle = \|u\|^2 + \|u'\|^2$$

(teorema di Pitagora)

V sp. vett. Euclideo, $U \subset V$ sottosp. vett.

b prodotto scalare di V $\rightsquigarrow$ $\boxed{b|_U \text{ prodotto scalare su } U}$

$b(v, w) = \langle v, w \rangle$

$U \subset V \Rightarrow U \times U \subset V \times V$

$b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $b|_{U \times U} : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$

bilineare, simmetrica e definita positiva

$b|_{U \times U}(u_1, u_2) = b(u_1, u_2)$

restrizione del prodotto scalare di V a U

o anche prodotto scalare indotto su U

Def Siano $v_1, \dots, v_n \in V$ (sp. vett. Euclideo) vettori. Diciamo che $v_1, \dots, v_n$ sono <u>ortogonali</u> (risp. <u>ortonormali</u>) se

$$\langle v_i , v_j \rangle = 0 \quad \forall\, i \neq j$$

$$\left(\text{risp. se } \underline{\langle v_i , v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}} \right)$$

<u>ortonormali</u>

$$\begin{cases} \langle v_i , v_i \rangle = \|v_i\|^2 = 1 & \forall\, i \\ \langle v_i , v_j \rangle = 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Prop. Sia V sp. vett. Euclideo, $v_1, \dots, v_r \in V - \{0\}$ vettori ortogonali. Allora $v_1, \dots, v_r$ sono <u>linearmente indipendenti</u>. In particolare, $r \leq \dim V$.

Dim Sia $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = 0_V$ una comb. lin. che è $= 0_V$.

$$\left\langle \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \cdot v_j , v_i \right\rangle = 0$$

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \langle v_j, v_i \rangle \underset{\text{ortogonali}}{=} \underline{\alpha_i \langle v_i, v_i \rangle} \implies \alpha_i = 0 \quad \text{perché}$$

$\forall i$. $\quad \underline{\langle v_i, v_i \rangle \neq 0}$

Def Sia V sp. vett. Euclideo, e sia $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ base di V.

Diciamo che $\mathcal{V}$ è una base ortonormale se

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall\, i, j = 1, \dots, n.$$

$$\left(\Longleftrightarrow \quad M_{\mathcal{V}}(b) = I_n \right)$$

b = prod. scalare

OSS Se $(v_1, \dots, v_n)$ è base ortonormale

$$\langle v, w \rangle = {}^tX \, I_n \, Y = {}^tX \, Y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$$\|v\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Es. $\mathbb{R}^n$ col prodotto scalare standard. La base canonica è ortonormale

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

Teorema (Processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt)

V sp. vett. Euclideo, $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ insieme di vettori linearmente indipendenti di V. Allora esiste un insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ t.c.

$$\operatorname{span}(u_1, \dots, u_k) = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_k)$$

$$\forall \; 1 \leq k \leq n.$$

Dim Per induzione su n (numero dei vettori)

bare dell'induzione: $n = 1$

$V = \{v_1\} \rightsquigarrow u_1 = v_1$

$v_1 \neq 0$ (lin. indip.)

[Ipotesi induttiva supponiamo che sia vero per $n-1$ vettori e lo dimostriamo per $n \geq 2$

$\{v_1, \dots, v_{n-1}\} \underset{\text{ip. induttiva}}{\rightsquigarrow} \{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ ortogonali t.c.

$\mathrm{Span}(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$

$\forall\, 1 \leq k \leq n-1$

Poniamo $\quad u_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i$

1) $v_n \in \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_n)$

$u_n \in \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_{n-1}, v_n) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$

$\Rightarrow \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_n) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$

$\Rightarrow u_n \neq 0$

2) $\langle u_n, u_j \rangle = \langle v_n, u_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v_n, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} \langle u_i, u_j \rangle =$

$j \leq n-1$

$= \langle v_n, u_j \rangle - \frac{\langle v_n, u_j \rangle}{\cancel{\langle u_j, u_j \rangle}} \cancel{\langle u_j, u_j \rangle} = 0$