1

Dati due parametri reali α e A, considera la funzione reale di due variabili reali x, y

$$u(x,y) = 1 + x^\alpha - A\,x\,y^2 \ .$$

Trova i valori di α e A tali che $u(x,y)$ sia la parte reale di una funzione olomorfa $f(z)$, ovvero affinchè

$$f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y) \ ,$$

dove $v(x,y)$ è anche una funzione reale. Poi assumi che $f(0) = 1$ e determina anche la funzione $v(x,y)$, e dunque $f(z)$.

2

Dati due parametri reali a e b, considera le funzioni reali di due variabili reali x, y

$$u(x,y) = \frac{ab + bx}{(1+x)^2 + y^2} \ , \quad v(x,y) = -\frac{by}{(1+x)^2 + y^2} \ .$$

Trova il valore di a tale che $u(x,y)$ e $v(x,y)$ siano la parte reale e immaginaria di una funzione olomorfa $f(z)$, ovvero affinchè

$$f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y) \ .$$

Poi trova il valore di b affinchè valga che

$$\int_{\gamma_{(0,2)}} f(z)dz = 6\pi i \ ,$$

dove $\gamma_{(0,2)}$ è il cammino circolare centrato nell'origine e di raggio 2, orientato in senso antiorario.

3

Considera

$$F(z) = \frac{z^3 \sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}{z^3 + 1} \ .$$

Elenca le singolarità di $F(z)$ (incluso eventualmente a $z = \infty$) e se sono isolate descrivine il tipo. Quindi calcola l'integrale

$$\int_{\gamma_{(0,2)}} dz\, F(z) \ ,$$

dove $\gamma_{(0,2)}$ è il cammino circolare centrato nell'origine di raggio 2, orientato in senso antiorario.

4

Considera

$$F(z) = \frac{z^3\left(\cosh\left(\frac{2\pi}{z}\right) - 1\right)}{z^2+1} \ .$$

Elenca le singolarità di $F(z)$ (incluso eventualmente a $z = \infty$) e se sono isolate descrivine il tipo. Quindi si calcoli l'integrale

$$\oint_{\gamma(0,\frac{1}{2})} F(z) \ ,$$

dove $\gamma(0, \frac{1}{2})$ è un cammino circolare centrato in $z = 0$ di raggio $\frac{1}{2}$, orientato in senso antiorario.

5

Calcola l'integrale

$$\int_{\gamma_{(0,1)}} dz\, e^{\frac{1}{z}} \frac{1}{1 - \sin\frac{1}{z}} \ ,$$

dove $\gamma_{(0,1)}$ è il cammino circolare centrato nell'origine di raggio 1, orientato in senso antiorario.

6

Calcola l'integrale

$$\int_{\gamma_{(0,1)}} dz\, \frac{z+1}{z^4(1-\cos\frac{1}{z})} \ ,$$

dove $\gamma_{(0,1)}$ è il cammino circolare centrato nell'origine di raggio 1, orientato in senso antiorario.

7

Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin(x)}{(x+i)^2} \ .$$

8

Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{(\cos z)^2}{z^2+1}.$$

Si elenchino le singolarità di $f(z)$, specificando se sono isolate, e se sono isolate specificandone il tipo. Usare $f(z)$ per calcolare l'integrale reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{(\cos x)^2}{x^2+1} \ .$$

9

Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{(\sin z)^2}{z^2+3}.$$

Si elenchino le singolarità di $f(z)$, specificando se sono isolate, e se sono isolate specificandone il tipo. Usare $f(z)$ per calcolare l'integrale reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{(\sin x)^2}{x^2+3} \ .$$

10

Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\log(z)}{\left(z+\frac{1}{z}\right)^2}.$$

Si elenchino le singolarità di $f(z)$, specificando se sono isolate, e se sono isolate specificandone il tipo. Spiegare in che modo $f(z)$ possa essere utilizzata per calcolare l'integrale reale

$$\int_{0}^{\infty} dx \frac{1}{(x+\frac{1}{x})^2} \ .$$

11

Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\log z}{\sqrt{z}\,(z+1)^2}.$$

Si elenchino le singolarità di $f(z)$, specificando se sono isolate, e se sono isolate specificandone il tipo. Spiegare in che modo $f(z)$ possa essere utilizzata per calcolare gli integrali reali

$$\int_{0}^{\infty} dx \frac{\log x}{\sqrt{x}(x+1)^2} \ , \quad \int_{0}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)^2} \ .$$

12

Calcola l'integrale

$$\int_0^\infty dx \, \frac{x^\alpha}{(1+x)^n} \; ,$$

dove n è un intero positivo e α è un parametro reale con $-1 < \alpha < n-1$.

13

Dato R numero reale positivo, definiamo $F(R)$ come il seguente integrale

$$F(R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(0,R)} \frac{1}{e^z + 1} \, dz \; ,$$

dove $\gamma(0,R)$ è un cammino circolare centrato nell'origine del piano complesso della variabile z, di raggio R, orientato in senso antiorario. Si disegni il grafico di $F(R)$.

14

Dato L numero reale positivo, definiamo $F(L)$ come

$$F(L) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma(L)} \frac{z}{\cosh(z) - 1} \, dz - \int_{\gamma(-L)} \frac{z}{\cosh(z) - 1} \, dz \right) \; ,$$

dove $\gamma(y)$ è un cammino dato dalla retta parallela all'asse x con ordinata costante y, percorsa da $x = -\infty$ a $x = +\infty$. Si disegni il grafico di $F(L)$.

15

Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} \; .$$