Durata: 5 ore.

Esercizio 1

Definiamo

$$G^{*n}(t) \equiv \underbrace{G * G * \cdots * G}_{n \text{ volte}}(t) \ ,$$

dove $*$ è il prodotto di convoluzione, e $G \in L^2(\mathbb{R})$ è la funzione seguente

$$G(t) = -\frac{e^{-|t|}}{2} \ .$$

L'obiettivo di questo esercizio è calcolare la funzione $g(t)$ definita dalla serie

$$g(t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(t) \ ,$$

seguendo i seguenti punti:

I - (2 punti) Ricordando che la trasformata di Fourier di $G(t)$ è

$$\widehat{G}(\omega) = -\frac{1}{1+\omega^2} \ ,$$

calcola la trasformata di Fourier $\widehat{G^{*n}}(\omega)$ di $G^{*n}(t)$.

II - (2 punti) Mostra che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{G^{*n}}(\omega) = -\frac{1}{2+\omega^2} \ .$$

III - (6 punti) Dando per buono che la trasformata e la somma infinita si possano commutare, il risultato del punto precedente ci dice anche che

$$\widehat{g}(\omega) = -\frac{1}{2+\omega^2} \ .$$

Applica l'anti-trasformata di Fourier per ottenere $g(t)$. Usa il Lemma di Jordan per calcolare l'integrale dell'anti-trasformata.

Esercizio 2

Considera la funzione di variabile complessa

$$f(z) = -i \log\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right) \ ,$$

dove il taglio del logaritmo è sull'asse reale negativo, mentre quello della radice $\sqrt{1-z^2}$ è su $[-\infty, -1] \cup [+1, +\infty]$.

I - (3 punti) Mostra che per $z \in [-1, 1]$ vale

$$f(z) = \arccos(z) \in [0, \pi] \ .$$

[*Suggerimento:* Poni $t = \arccos(z)$ in modo che valga

$$z = \cos(t) \ , \tag{1}$$

usa la definizione di $\cos(t)$ in termini dell'esponenziale complesso e risolvi (**??**) per t come funzione di z.]

II - (4 punti) Considera

$$F(z) = \frac{f(z)}{\sqrt{1-z}} \ .$$

Mostra che $z = 1$ non è un punto di diramazione per $F(z)$.

[*Suggerimento:* Cosa succede a $\sqrt{1-z}$ e a $\sqrt{1-z^2}$ quando z ruota di 2π attorno a $z = 1$? Per concludere, usa che $z - i\sqrt{1-z^2} = \frac{1}{z+i\sqrt{1-z^2}}$.]

III - (5 punti) Calcola $\frac{df}{dz}$ e mostra che si puó scrivere come

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1-z}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1-z)^{n-\frac{1}{2}} \ .$$

per certi coefficienti a_n (non è necessario scrivere esplicitamente tutti i coefficienti a_n). Integrando termine per termine, questo implica un'analoga espansione per $f(z)$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n (1-z)^{n-\frac{1}{2}} \ , \\ b_n &= -\frac{a_{n-1}}{n-\frac{1}{2}} \ . \end{aligned}$$

Deduci da questo che $F(z)$ (definita al punto II) ha una singolaritá rimuovibile in $z = 1$ e calcola $F(1)$.

Esercizio 3

Dato uno spazio di Hilbert H con un sistema ortonormale completo (abbreviato in s.o.c.) $\{e^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, definiamo l'operatore lineare $T : H \to H$ dando la sua azione sugli elementi del s.o.c.

$$T(e^{(n)}) = \frac{e^{(2n-1)} + e^{(2n)}}{\sqrt{2}} \ .$$

I - (3 punti) Mostra che T preserva il prodotto scalare ma non è un operatore unitario.

II - (4 punti) Trova l'operatore aggiunto $T^\dagger$. Per definirlo è sufficiente assegnare la sua azione sugli elementi del s.o.c..

III - (4 punti) Mostra che T non ha autovettori/autovalori. Esibisci un autovettore di $T^\dagger$.