Esame di Programmazione Informatica

26 dicembre 2020

Informazioni generali

- 2 esercizi di script MATLAB e 2 domande a risposta multipla.
- La durata dell'esame è di 2 ore.
- È consigliato l'uso di MATLAB nello svolgimento di tutti i punti.
- Le slide e gli script del corso sono ovviamente consultabili liberamente.
- Il punteggio assegnato ad ogni esercizio ed alle domande a risposta multipla è indicato tra parentesi.

Esercizio 1 (10/30)

Dato un generico polinomio $p(x)$ di grado n,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

esso può essere rappresentato dal vettore riga dei suoi coefficienti

$$\mathbf{a} = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

La derivata di $p(x)$ è il polinomio

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1}$$

che può essere nuovamente rappresentato dal vettore riga dei suoi coefficienti

$$\mathbf{b} = [a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots, n a_n].$$

Scrivere una funzione che prenda in ingresso il vettore riga $\mathbf{a}$ dei coefficienti di $p(x)$ e restituisca in uscita il vettore riga $\mathbf{b}$ dei coefficienti della derivata $p'(x)$.

Si scriva poi uno script nel quale si utilizza la funzione precedente per calcolare la derivata del polinomio $p(x) = x + x^3$.

Soluzione: è sufficiente calcolare il grado n del polinomio $p(x)$ per poi effettuare il prodotto degli interi da 1 a n per i coefficienti $a_1, \ldots, a_n$, elemento per elemento:

derivata_polinomio.m

```
function b = derivata_polinomio( a )
   n = length( a ) - 1 ;
   b = (1:n) .* a(2:end) ;
end
```

Per calcolare la derivata di $p(x) = x + x^3$ è sufficiente definire il vettore dei suoi coefficienti $\mathbf{a} = [0, 1, 0, 1]$ e richiamare la precedente funzione:

Main.m

```
% p(x) = x + x^3
a = [ 0 1 0 1 ] ;

% Derivata prima, 1 + 3x^2
b = derivata_polinomio( a )
```

ottenendo correttamente $\mathbf{b} = [1, 0, 3]$ cioè $p'(x) = 1 + 3x^2$.

Esercizio 2 (18/30)

Dato un generico polinomio $p(x)$ di grado n,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

esso può essere rappresentato dal vettore riga dei suoi coefficienti

$$\mathbf{a} = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

La divisione di $p(x)$ per il polinomio di primo grado $(x + \alpha)$ dà luogo ad un quoziente $q(x)$ ed un resto r:

$$p(x) = (x + \alpha)q(x) + r \tag{1}$$

dove $q(x)$ è un polinomio di grado $m = n - 1$:

$$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m$$

che può essere nuovamente rappresentato dal vettore riga dei suoi coefficienti

$$\mathbf{b} = [b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m].$$

Svolgendo il prodotto dell'equazione (1) e raccogliendo i termini di pari grado, si ottengono le seguenti formule per calcolare il resto r ed i coefficienti $b_0, \ldots, b_m$ del quoziente $q(x)$ a partire dai coefficienti noti $a_0, \ldots, a_n$ e dallo scalare noto α:

$$\begin{aligned} r &= a_0 - \alpha b_0 \\ b_0 &= a_1 - \alpha b_1 \\ b_1 &= a_2 - \alpha b_2 \\ &\vdots \\ b_i &= a_{i+1} - \alpha b_{i+1} \\ &\vdots \\ b_{m-1} &= a_m - \alpha b_m \\ b_m &= a_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Scrivere una funzione che prenda in ingresso:

- il vettore riga $\mathbf{a}$ dei coefficienti di $p(x)$,
- lo scalare α del polinomio divisore $(x + \alpha)$,

e restituisca in uscita:

- il vettore riga $\mathbf{b} = [b_0, \ldots, b_m]$ dei coefficienti di $q(x)$,
- il resto r della divisione,

utilizzando le precedenti formule indicate in (2). Si nota che ognuna di queste equazioni, tranne l'ultima, richiede la conoscenza del termine incognito b_{i+1} successivo. È quindi opportuno scorrere queste equazioni in ordine inverso, dall'ultima alla prima. Essendo le equazioni in rosso simili nella forma ($b_i = a_{i+1} - \alpha b_{i+1}$), andrà utilizzato un ciclo `for` per scorrerle tutte, in ordine inverso.

Per controllare la correttezza della funzione scritta, la si può utilizzare per dividere il polinomio $p(x) = x^2 - 1$, cioè $\mathbf{a} = [-1, 0, 1]$, per il polinomio $x + 1$, cioè $\alpha = 1$. Il risultato corretto è quindi $q(x) = x - 1$, cioè $\mathbf{b} = [-1, 1]$, e resto $r = 0$.

Soluzione: è necessario innanzitutto calcolare il grado n di $p(x)$ ed il grado $m = n - 1$ di $q(x)$ per allocare il vettore riga $\mathbf{b}$, lungo $m+1$, dove scrivere i risultati.

Si scorrono quindi tutte le equazioni (2) dall'ultima alla prima in ordine inverso: l'ultima equazione, poi le equazioni in rosso con un unico ciclo `for`, infine la prima equazione. Il ciclo `for` scorre sull'indice i della formula $b_i = a_{i+1} - \alpha b_{i+1}$, andando perciò da $i = m - 1$ (ultima equazione rossa) ad $i = 0$ (prima equazione rossa), in senso decrescente: l'istruzione di controllo del ciclo `for` sarà quindi definita da `i = m-1:-1:0`.

Facciamo sempre attenzione a ricordare che in MATLAB i vettori iniziano con indice 1, a differenza degli indici i utilizzati per i coefficienti dei polinomi, che iniziano da 0 (a_0, b_0): utilizzeremo quindi una variabile aggiuntiva `ix=i+1` che utilizzeremo per accedere ai vettori `a` e `b`.

divisione_polinomio.m

```
function [ b , r ] = divisione_polinomio( a , alfa )
   n = length( a ) - 1 ;    % grado polinomio p(x)
   m = n - 1 ;              % grado polinomio q(x)
   b = zeros( 1 , m+1 ) ;   % inizializzazione vettore riga b

   % Ultima equazione
   b(end) = a(end) ; % b_m = a_n

   % Ciclo for sulle equazioni in rosso
   for i = m-1 : -1 : 0
      ix = i+1 ;
      b(ix) = a(ix+1) - alfa * b(ix+1) ; % b_i = a_{i+1} - αb_{i+1}
   end

   % Prima equazione
   r = a(1) - alfa * b(1) ; % r = a_0 - αb_0
end
```

Controlliamo che la divisione di $p(x) = x^2 - 1$, cioè $\mathbf{a} = [-1, 0, 1]$, per $x + 1$, cioè $\alpha = 1$, dia $q(x) = x - 1$, cioè $\mathbf{b} = [-1, 1]$, e resto $r = 0$:

Main.m

```
% p(x) = x^2 - 1
a = [ -1 0 1 ] ;

% Divisione di p(x) per x + α:
alfa = 1 ; % divisione per x + 1
[ b , r ] = divisione_polinomio( a , alfa )
```

ottenendo correttamente $\mathbf{b} = [-1, 1]$, cioè $q(x) = x - 1$, e $r = 0$.

Domande a risposta multipla (5/30)

Domanda 1 (3/30)

È possibile esprimere esattamente la frazione $x = 1/3$ utilizzando una rappresentazione posizionale in base 2 con un numero finito di cifre?

- Si, sempre.
- Dipende dal numero finito di cifre a disposizione.
- Si, ma solo utilizzando 64 bit.
- No, mai.

Soluzione: No, mai. Utilizzando lo schema iterativo delle moltiplicazioni per la base $b = 2$ si ottiene $1/3 = (0.010101...)_2 = (0.\overline{01})_2$, quindi sarebbero necessarie infinite cifre in base 2 per esprimere esattamente $x = 1/3$. Alternativamente, si può giungere alla stessa conclusione osservando che il denominatore, 3, non è potenza di 2.

Domanda 2 (2/30)

Data la seguente funzione MATLAB:

```
function y = f(x, n)
   y = 1 ;
   for i = 1 : n
      y = y * x ;
   end
end
```

che funzione matematica $f(x)$ essa implementa?

- nx
- yx^n
- x^n
- yx

Soluzione: x^n. Ad ogni iterazione del ciclo `for`, y viene moltiplicato per x partendo da $y = 1$: dopo n moltiplicazioni per x si ottiene x^n.