PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 3
Anno accademico 2020/2021 – CdL MATEMATICA
Prima simulazione – 28.12.2020

1. Trovare le eventuali soluzioni del problema

$$\begin{cases} u''(t) - 2u'(t) + u(t) = e^t \\ \\ u(0) = 1 \,, \quad u'(1) = 0 \,. \end{cases}$$

2. Studiare la stabilità dei punti di equilibrio del sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x - x^3 \,. \end{cases}$$

3. Calcolare $\int_E f$, dove

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\} \,,$$

e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è definita da

$$f(x, y) = 3x - 2y \,.$$

4. Sia $\omega : \mathbb{R}^3 \to \Omega_2(\mathbb{R}^3)$ la 2-forma differenziale definita da

$$\omega(x, y, z) = xy\, dy \wedge dz + xz\, dz \wedge dx - yz\, dx \wedge dy \,,$$

e sia $\sigma : [-1, 1] \times [-2, 2] \to \mathbb{R}^3$ la superficie definita da

$$\sigma(u, v) = (u, v, uv) \,.$$

a) Dimostrare che ω è chiusa.

b) Trovare una 1-forma differenziale $\widetilde{\omega} : \mathbb{R}^3 \to \Omega_1(\mathbb{R}^3)$ tale che $d\widetilde{\omega} = \omega$.

c) Calcolare $\int_\sigma \omega$.

d) Esplicitare $\partial\sigma$.

e) Verificare l'uguaglianza $\int_{\partial\sigma} \widetilde{\omega} = \int_\sigma \omega$.