Geometria 1 per Matematica e IADA

Foglio di esercizi 11

1 gennaio 2021

1) Dire se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -4 & -7 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_3$. In caso affermativo trovare, nei vari casi, una matrice diagonale D e una matrice invertibile S tali che $A = S^{-1}DS$.

2) Calcolare esplicitamente A^n per ogni $n \in \mathbb{Z}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 5/2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Suggerimento: si sfrutti l'identità $(S^{-1}DS)^n = S^{-1}D^nS$.

3) Si dica se la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile su: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_5$. In caso affermativo si determini, nei vari casi, una base di autovettori e la matrice diagonale corrispondente.

4) Si consideri la funzione $b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come

$$b((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_2 - x_1y_3 - x_3y_3 + x_1y_1 + 2x_2y_1 - x_3y_1.$$

Verificare che b è bilineare e simmetrica e determinarne la matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Calcolare il rango e il tipo di b (tipo: (semi)definita positiva/negativa o indefinita). Scrivere b in forma matriciale.

5) Sia c la forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ definita, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 11 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verificare che b è simmetrica e definita positiva, e quindi è un prodotto scalare. Scrivere la matrice di c rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare il coseno dell'angolo formato dai vettori v_2 e v_3.

Determinare una base ortonormale per $e_1^\perp$.

6) Determinare una base ortonormale per $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare dell'esercizio precedente.

7) In $\mathbb{R}^4$ col prodotto scalare canonico si consideri il sottospazio W generato dai vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare una base ortonormale per W e una per $W^\perp$.