Geometria 1 per Matematica e IADA

Esempi su ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

1 gennaio 2021

Problema 1. Consideriamo $\mathbb{R}^2$ col prodotto scalare c definito dalla matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Determinare una base ortonormale e una matrice $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tale che $C = {}^tSS$.

Svolgimento. Verifichiamo preliminarmente che c è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$. Dato che C è simmetrica, resta da verificare che è definita positiva. Per $X = {}^t(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\langle X, X\rangle_c = {}^tXCX = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^4 \geq 0$$

per ogni $X \in \mathbb{R}^2$ e vale l'uguaglianza se e solo se $X = 0$. Quindi c è definita positiva e pertanto è un prodotto scalare.

Applichiamo ora il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt ad una base di $\mathbb{R}^2$, per esempio alla base canonica $\{e_1, e_2\}$, per ottenere una base *ortogonale* $\{u_1, u_2\}$ rispetto al prodotto scalare c:

$$\begin{aligned} u_1 &:= e_1 \\ u_2 &:= e_2 - \frac{\langle e_2, u_1\rangle_c}{\langle u_1, u_1\rangle_c}\, u_1 = e_2 - 2e_1 = {}^t(-2, 1), \end{aligned}$$

dato che $\langle e_1, e_1\rangle = 1$ e $\langle e_2, e_1\rangle = 2$.

A questo punto si osserva che u_1 e u_2 hanno norma 1 e quindi formano una base ortonormale. In generale però il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, applicato in questo modo, non produce automaticamente una base ortonormale, ma solo una ortogonale. Per ottenere una base ortonormale basta quindi *normalizzare* i vettori ottenuti, cioè dividerli per la propria norma.

Infine, ricordando come funziona il cambiamento di base per una forma bilineare, e tenendo presente che la matrice di c rispetto alla base $\mathcal{U} = (u_1, u_2)$ è I_2, si ottiene che S è proprio la matrice del cambiamento di base, dalla base canonica alla base $\mathcal{U}$:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha pertanto $C = {}^tSS$, come si verifica facilmente.

Problema 2. Si consideri il sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare una base ortonormale per W e per $W^\perp$.

Svolgimento. Calcoliamo $\dim W = \mathrm{rg}(w_1, w_2, w_3) = 3$, quindi i vettori dati formano una base per W. Completiamo ora l'insieme di vettori $\{w_1, w_2, w_3\}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$. Facilmente si verifica che basta aggiungere, per esempio, il vettore e_4.

Applicando Gram-Schmidt ai vettori $\{w_1, w_2, w_3, e_4\}$, e successivamente normalizzando, otterremo una base ortonormale per $\mathbb{R}^4$ i cui primi 3 vettori formano una base (ortonormale) per W, e l'ultimo una per $W^\perp$. Si ha:

$$\begin{aligned}
u_1 &:= w_1 \\
u_2 &:= w_2 - \frac{\langle w_2, u_1\rangle_c}{\langle u_1, u_1\rangle_c} u_1 = w_2 - \frac{5}{6} w_1 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix} \\
u_3 &:= w_3 - \frac{\langle w_3, u_1\rangle_c}{\langle u_1, u_1\rangle_c} u_1 - \frac{\langle w_3, u_2\rangle_c}{\langle u_2, u_2\rangle_c} u_2 = w_3 - \frac{2}{3} u_1 + \frac{2}{5} u_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\
u_4 &:= e_4 - \frac{\langle e_4, u_1\rangle_c}{\langle u_1, u_1\rangle_c} u_1 - \frac{\langle e_4, u_2\rangle_c}{\langle u_2, u_2\rangle_c} u_2 - \frac{\langle e_4, u_3\rangle_c}{\langle u_3, u_3\rangle_c} u_3 = \frac{1}{28}\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

A questo punto è sufficiente normalizzare i vettori $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ per ottenere la seguente base ortonormale per $\mathbb{R}^4$:

$$\left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \frac{u_3}{\|u_3\|}, \frac{u_4}{\|u_4\|} \right\}.$$

I primi tre formano una base ortonormale per W e l'ultimo per $W^\perp$ (si completino i calcoli).