PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 3
Anno accademico 2020/2021 – CdL MATEMATICA
Prima simulazione – 28.12.2020

1. Trovare le eventuali soluzioni del problema

$$\begin{cases} u''(t) - 2u'(t) + u(t) = e^t \\ \\ u(0) = 1\,, \quad u'(1) = 0\,. \end{cases}$$

Svolgimento. L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ ha un'unica soluzione $\lambda = 1$, di molteplicità 2; le soluzioni dell'equazione autonoma associata sono pertanto del tipo $(a + bt)e^t$. Una soluzione particolare dell'equazione differenziale si trova con il metodo per simiglianza, cercandola del tipo $u(t) = c\,t^2 e^t$. Sostituendo, si vede che deve essere $c = \frac{1}{2}$. Quindi tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono del tipo

$$u(t) = \left(a + bt + \tfrac{1}{2}\,t^2\right) e^t\,.$$

Imponendo la condizione $u(0) = 0$ si vede che deve essere $a = 1$. Imponendo che sia $u'(1) = 0$ si trova $b = -\frac{5}{4}$. In conclusione, l'unica soluzione del nostro problema è

$$u(t) = \left(1 - \tfrac{5}{4}\,t + \tfrac{1}{2}\,t^2\right) e^t\,.$$

2. Studiare la stabilità dei punti di equilibrio del sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x - x^3\,. \end{cases}$$

Svolgimento. Il campo di vettori $f(x, y) = (y, x - x^3)$ è tale che

$$f(x, y) = (0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \in \Big\{(-1, 0), (0, 0), (1, 0)\Big\}\,.$$

La sua jacobiana è

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui

$$Jf(-1, 0) = Jf(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad Jf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di $Jf(0, 0)$ sono ± 1, per cui $(0, 0)$ è un equilibrio *instabile*. Quelli di $Jf(-1, 0) = Jf(1, 0)$ sono $\pm i\sqrt{2}$, ma questa informazione non ci è sufficiente a determinare la stabilità o meno dei punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$.

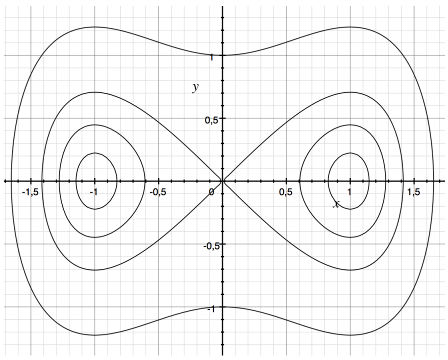
Osserviamo a questo punto che il sistema è di tipo hamiltoniano, con funzione hamiltoniana

$$H(x,y) = \tfrac{1}{2}(y^2 - x^2) + \tfrac{1}{4}\,x^4.$$

Si ha che

$$\nabla H(x,y) = (-x + x^3, y)\,, \quad \operatorname{Hess} H(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui si vede che i punti $(-1,0)$ e $(1,0)$ sono minimi locali stretti della funzione (in realtà sono minimi globali), in quanto H è strettamente convessa in un loro intorno. Quindi le linee di livello in un intorno di $(-1,0)$ e di $(1,0)$ sono curve chiuse, per cui questi sono equilibri *stabili* del nostro sistema.



3. Calcolare $\int_E f$, dove

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}\,,$$

e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è definita da

$$f(x,y) = 3x - 2y\,.$$

Svolgimento. Passiamo a coordinate polari modificate con la funzione $\varphi(\rho,\theta) = (2\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ e troviamo che

$$\int_E f = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (6\rho\cos\theta - 2\rho\sin\theta)\,2\rho\,d\theta \right) d\rho = \int_0^1 0\,d\rho = 0\,.$$

4. Sia $\omega : \mathbb{R}^3 \to \Omega_2(\mathbb{R}^3)$ la 2-forma differenziale definita da

$$\omega(x,y,z) = xy\,dy \wedge dz + xz\,dz \wedge dx - yz\,dx \wedge dy\,,$$

e sia $\sigma : [-1,1] \times [-2,2] \to \mathbb{R}^3$ la superficie definita da

$$\sigma(u,v) = (u, v, uv)\,.$$

a) Dimostrare che ω è chiusa.

b) Trovare una 1-forma differenziale $\widetilde{\omega} : \mathbb{R}^3 \to \Omega_1(\mathbb{R}^3)$ tale che $d\widetilde{\omega} = \omega$.

c) Calcolare $\int_\sigma \omega$.

d) Esplicitare $\partial\sigma$.

e) Verificare l'uguaglianza $\int_{\partial\sigma} \widetilde{\omega} = \int_\sigma \omega$.

Svolgimento. Sia $F(x, y, z) = (xy, xz, -yz)$ il campo di vettori associato a ω. Si verifica che

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} xy + \frac{\partial}{\partial y} xz + \frac{\partial}{\partial z} (-yz) = 0 ,$$

per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, per cui F è solenoidale, ossia ω è chiusa.

Troviamo un campo di vettori $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\operatorname{rot} V = F$. Usando la formula vista a lezione, essendo il dominio stellato,

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= \int_0^1 t\, F(tx, ty, tz) \times (x, y, z)\, dt \\ &= \int_0^1 t^3\, (xy, xz, -yz) \times (x, y, z)\, dt \\ &= \tfrac{1}{4}(xz^2 + y^2 z, -2xyz\, , xy^2 - x^2 z) . \end{aligned}$$

Abbiamo così

$$\widetilde{\omega}(x, y, z) = \tfrac{1}{4}(xz^2 + y^2 z)\, dx - \tfrac{1}{2}\, xyz\, dy + \tfrac{1}{4}(xy^2 - x^2 z)\, dz .$$

Per calcolare $\int_\sigma \omega$, troviamo dapprima

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u, v) = (1, 0, v) , \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u, v) = (0, 1, u) ,$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u, v) = (-v, -u, 1) ,$$

per cui

$$\begin{aligned} \int_\sigma \omega &= \int_{[-1,1]\times[-2,2]} F(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u, v)\, du\, dv \\ &= \int_{-2}^2 \left(\int_{-1}^1 (uv, u^2 v, -v^2 u) \cdot (-v, -u, 1)\, du \right) dv \\ &= \int_{-2}^2 \left(\int_{-1}^1 (-uv^2 - u^3 v - v^2 u)\, du \right) dv = 0 . \end{aligned}$$

Esplicitiamo ora

$$\begin{aligned} &\alpha_1^- : [-2, 2] \to \mathbb{R}^2 , \quad \alpha_1^-(v) = (-1, -v) , \\ &\beta_1^+ : [-2, 2] \to \mathbb{R}^2 , \quad \beta_1^+(v) = (1, v) , \\ &\alpha_2^+ : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2 , \quad \alpha_2^+(u) = (u, -2) , \\ &\beta_2^- : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2 , \quad \beta_2^-(u) = (-u, 2) , \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma\circ\alpha_1^- &: [-2,2]\to\mathbb{R}^3\,, \quad \sigma\circ\alpha_1^-(v) = (-1,-v,v)\,,\\
\sigma\circ\beta_1^+ &: [-2,2]\to\mathbb{R}^3\,, \quad \sigma\circ\beta_1^+(v) = (1,v,v)\,,\\
\sigma\circ\alpha_2^+ &: [-1,1]\to\mathbb{R}^3\,, \quad \sigma\circ\alpha_2^+(u) = (u,-2,-2u)\,,\\
\sigma\circ\beta_2^- &: [-1,1]\to\mathbb{R}^3\,, \quad \sigma\circ\beta_2^-(u) = (-u,2,-2u)\,.
\end{aligned}
$$

Calcoliamo quindi $\int_{\partial\sigma}\widetilde{\omega} = \int_{\partial\sigma} V\cdot dS$. Essendo

$$
\begin{aligned}
\int_{\sigma\circ\alpha_1^-} V\cdot dS &= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(-v^2+v^3,-2v^2,-v^2-v)\cdot(0,-1,1)\,dv\\
&= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(v^2-v)\,dv = \frac{4}{3}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\sigma\circ\beta_1^+} V\cdot dS &= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(v^2+v^3,-2v^2,v^2-v)\cdot(0,1,1)\,dv\\
&= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(-v^2-v)\,dv = -\frac{4}{3}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\sigma\circ\alpha_2^+} V\cdot dS &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(4u^3-8u,-8u^2,4u+2u^3)\cdot(1,0,-2)\,du\\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(-16u)\,du = 0\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\sigma\circ\beta_2^-} V\cdot dS &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(-4u^3-8u,-8u^2,-4u+2u^3)\cdot(-1,0,-2)\,du\\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}16u\,du = 0\,,
\end{aligned}
$$

abbiamo che

$$
\int_{\partial\sigma} V\cdot dS = \frac{4}{3}-\frac{4}{3}+0+0 = 0\,.
$$