Esercizi da esame

La divisione in anni accademici si riferisce all'anno accademico in cui è stato effettuato il corso. Cronologicamente gli appelli sono di giugno, luglio, settembre (2), gennaio, febbraio. L'anno accademico 2019/2020 comprende più esercizi perché a causa del Covid gli appelli scritti telematici e/o in presenza a volte sono stati sdoppiati in più gruppi.

Parti lasciate come esercizio, sono lasciate allo studente e andrebbero analizzate in sede d'esame nel caso di un esercizio analogo.

1 Serie e integrali

1.1 A.A. 2018/2019

Esercizio 1.1. *Al variare del parametro reale $\alpha < 0$, studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan(n^\alpha)}{\log_3\left(\frac{1}{n!}+1\right)} \cdot \frac{e^{n^{-n}}-1}{\arcsin\left(2^{-n}+3^{-n}\right)}\,.$$

Innanzitutto notiamo che la serie è a termini positivi. Poiché il parametro α è negativo abbiamo che $\lim_n n^\alpha = 0$ per ogni α da considerare. Dai limiti fondamentali abbiamo che

$$\begin{aligned}
&\lim_n \frac{\tan(n^\alpha)}{n^\alpha} = 1\,,\\
&\lim_n \frac{\log_3\left(\frac{1}{n!}+1\right)}{\frac{1}{n!}} = \lim_n \frac{1}{\log 3}\frac{\log\left(\frac{1}{n!}+1\right)}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{\log 3}\,,\\
&\lim_n \frac{e^{n^{-n}}-1}{n^{-n}} = 1\,,\\
&\lim_n \frac{\arcsin\left(2^{-n}+3^{-n}\right)}{2^{-n}+3^{-n}} = 1\,.\\
&\lim_n \frac{2^{-n}+3^{-n}}{2^{-n}} = \lim_n 1+\left(\frac{3}{2}\right)^n = 1\,.
\end{aligned}$$

Dai limiti precedenti troviamo che la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha n^{-n}}{\frac{1}{n!}\cdot 2^{-n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha \cdot n! \cdot 2^n}{n^n}\,.$$

Usando il criterio del confronto asintotico, infatti

$$\lim_n \frac{\dfrac{\tan(n^\alpha)}{\log_3\left(\frac{1}{n!}+1\right)} \cdot \dfrac{e^{n^{-n}}-1}{\arcsin\left(2^{-n}+3^{-n}\right)}}{\dfrac{n^\alpha n^{-n}}{\frac{1}{n!}\cdot 2^{-n}}} = \log 3 \in \mathbb{R}^+$$

(non è obbligatorio scrivere questo enorme limite nel compito, sono sufficienti le considerazioni fatte sopra). Allora studiamo il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha \cdot n! \cdot 2^n}{n^n}\,.$$

Proviamo col criterio del rapporto e scriviamo

$$\begin{aligned}\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_n \frac{(n+1)^\alpha \cdot (n+1)! \cdot 2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n^\alpha \cdot n! \cdot 2^n} \\ &= \lim_n \frac{(n+1)^\alpha \cdot (n+1) \cdot n! \cdot 2^n \cdot 2}{(n+1)^n \cdot (n+1)} \cdot \frac{n^n}{n^\alpha \cdot n! \cdot 2^n} \\ &= \lim_n \frac{(1+\frac{1}{n})^\alpha \cdot 2}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{2}{e} < 1\end{aligned}$$

Concludiamo quindi che la serie converge per ogni $\alpha < 0$.

Esercizio 1.2. *Al variare del parametro reale $x \in \mathbb{R}$, studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(x^2 + 5x + 5\right)^n .$$

Poniamo $y = x^2 + 5x + 5$ e troviamo la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} y^n . \tag{1}$$

Detto, $a_n = \frac{1}{n}$ troviamo che $L = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1$, quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è $\rho = 1/L = 1$.

In alternativa si può discutere l'*assoluta* convergenza della serie con il criterio del rapporto

$$\lim_n \frac{\frac{1}{n+1}|y|^{n+1}}{\frac{1}{n}|y|^n} = \lim_n \frac{n}{n+1} \cdot |y| = |y| .$$

Dimenticare di trattare l'assoluta convergenza, pensando che valga sempre $y > 0$, e applicare il criterio del rapporto ad una serie a termini di segno alterno è un errore. Quindi è importante ricordare di mettere i valori assoluti nella formula precedente.

A questo punto la serie (1)

- è divergente per $y > 1$ dal fatto che il raggio di convergenza è 1 o dal criterio del rapporto,
- è divergente per $y = 1$ in quanto abbiamo in questo caso $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$,
- è convergente per $|y| < 1$ (assolutamente convergente per $-1 < y < 0$),
- è semplicemente convergente per $y = -1$ in quanto abbiamo in questo caso $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ a cui possiamo applicare il criterio di Leibniz,
- è indeterminata per $y < -1$ dal fatto che il raggio di convergenza è 1 o dal criterio del rapporto.

A questo punto essendo $y = x^2 + 5x + 5$ dobbiamo risolvere le equazioni

$$x^2 + 5x + 5 \begin{cases} = 1 & \text{con soluzioni } -1 \text{ e } -4, \\ = 0 & \text{con soluzioni } x_\pm = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}, \\ = -1 & \text{con soluzioni } -2 \text{ e } -3. \end{cases}$$

A questo punto concludiamo che la serie assegnata

- è divergente se $x \leq -4$ oppure $x \geq -1$,
- è convergente se $-4 < x < -3$ oppure $-2 < x < -1$ (assolutamente convergente se $x_- < x < -3$ oppure $-2 < x < x_+$),
- è semplicemente convergente se $x = -3$ oppure $x = -2$,
- è indeterminata se $-3 < x < -2$.

Esercizio 1.3. *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n) \frac{\log(1 + \frac{1}{n!})}{\arctan(2^{-n})} .$$

La serie è a segno qualunque, il segno è deciso da $\sin n$ che oscilla tra -1 e 1. Quindi di essa studiamo l'assoluta convergenza. Notiamo che

$$\left| (\sin n) \frac{\log(1 + \frac{1}{n!})}{\arctan(2^{-n})} \right| = |\sin n| \frac{\log(1 + \frac{1}{n!})}{\arctan(2^{-n})} \leq 1 \cdot \frac{\log(1 + \frac{1}{n!})}{\arctan(2^{-n})} .$$

Se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{n!})}{\arctan(2^{-n})} \tag{2}$$

risultasse convergente, potremmo concludere che anche la serie iniziale è assolutamente convergente usando il criterio del confronto.

Dai limiti fondamentali deduciamo che

$$\lim_n \frac{\log(1 + \frac{1}{n!})}{\frac{1}{n!}} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_n \frac{\arctan(2^{-n})}{2^{-n}} = 1 ,$$

quindi la serie (2) ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$. Per quest'ultima proviamo ad applicare il criterio del rapporto

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_n \frac{2^n \cdot 2}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_n \frac{2}{n} = 0 < 1 ,$$

da cui concludiamo la convergenza dell'ultima serie, e di conseguenza l'assoluta convergenza della serie assegnata.

Esercizio 1.4. *Studiare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \right) (\arctan n^{\alpha}) .$$

La serie è a termini positivi. Per quanto riguarda il primo fattore osserviamo che

$$\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{n} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) \tag{3}$$

da cui ricordando il limite fondamentale

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} = \alpha , \tag{4}$$

troviamo

$$\lim_n \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}\cdot\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}\,.$$

Quindi abbiamo mostrato che

$$\lim_n \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{n^{-2/3}} = \frac{1}{3}\,.$$

Passiamo ora a studiare il secondo fattore:

- se $\alpha > 0$ abbiamo $\lim_n \arctan n^\alpha = \frac{\pi}{2}$,
- se $\alpha \geq 0$ abbiamo $\arctan n^\alpha = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- se $\alpha < 0$ useremo che $\lim_n \frac{\arctan n^\alpha}{n^\alpha} = 1$.

Mettendo assieme i due fattori concludiamo che

- se $\alpha \geq 0$ il termine della serie può essere confrontato asintoticamente con $n^{-2/3}$ e concludiamo che la serie di partenza diverge.
- se $\alpha < 0$ il termine della serie può essere confrontato asintoticamente con $n^{-2/3+\alpha}$. A questo punto abbiamo convergenza se $-\frac{2}{3}+\alpha < -1$, ovvero se $\alpha < -\frac{1}{3}$. Mentre se $\alpha \geq -\frac{1}{3}$ la serie diverge.

Esercizio 1.5. *Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{3^n+4^n}\,.$$

Osserviamo che la serie è a termini positivi. Valendo il seguente limite

$$\lim_n \frac{4^n}{3^n+4^n} = \lim_n \frac{1}{1+(\frac{3}{4})^n} = 1\,,$$

per il criterio del confronto asintotico il carattere della serie data sarà lo stesso della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^x}{4}\right)^n\,,$$

che è una serie geometrica. Ne consegue che abbiamo convergenza se $|e^x/4| < 1$ ovvero se e solo se $e^x < 4$, da cui $x < 2\ln 2$. Per $x \geq 2\ln 2$ avremo divergenza.

Esercizio 1.6. *Studiare, al variare di $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, il carattere della serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{k^2+1}(\tan x)^k\,.$$

Innanzitutto poniamo $y = \tan x$, con $y \in \mathbb{R}$, essendo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Ne studiamo l'assoluta convergenza e osserviamo che la frazione $\frac{k+2}{k^2+1}$ è sempre positiva. Inoltre vale

$$\lim_k \frac{\frac{k+2}{k^2+1}}{\frac{1}{k}} = 1$$

per cui avremo l'assoluta convergenza della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{k^2+1} y^k$$

se e solo se la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} y^k$$

è assolutamente convergente. Essa è una serie di potenze di raggio 1 (mostrarlo per esercizio). Quindi avremo che se $|y| < 1$ la serie è assolutamente convergente. Per $y > 1$ sarà divergente, per $y < -1$ sarà indeterminata. Tornando alla variabile x troviamo quindi:

- Se $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$ allora la serie è indeterminata
- Se $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ sarà assolutamente convergente.
- Se $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ sarà divergente.
- Vanno risolti a parte i casi rimanenti. Se $x = \frac{\pi}{4}$ otteniamo la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{k^2+1}$, che ha lo stesso carattere di $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$, ovvero è divergente. Per $x = -\frac{\pi}{4}$ la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k+2}{k^2+1}$ converge semplicemente usando il criterio di Leibniz. Infatti vale facilmente $\lim_k \frac{k+2}{k^2+1} = 0$ ed è decrescente (per k sufficientemente grandi). Dimostrare per esercizio quest'ultima affermazione.

1.2 A.A. 2019/2020

Esercizio 1.7. *Determinare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Essendo $\sin(1/n) < 1$ la serie è a termini positivi. Ad essa applichiamo il criterio della radice e troviamo

$$\lim_n \left(1 - \sin \frac{1}{n}\right)^n = \lim_n \mathrm{e}^{n \ln(1 - \sin \frac{1}{n})} = \mathrm{e}^{-1} < 1$$

essendo

$$\lim_n n \ln(1 - \sin \tfrac{1}{n}) = \lim_n \frac{\ln(1 - \sin \frac{1}{n})}{-\sin \frac{1}{n}} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} (-1) = -1\,.$$

La serie quindi converge.

Esercizio 1.8. *Determinare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} \frac{\sin(n^{-1})}{6^n}.$$

Dopo aver osservato che la serie è a termini positivi, possiamo usare il criterio del confronto asintotico, essendo $\lim_n \frac{\sin n^{-1}}{n^{-1}} = 1$, ottenendo che la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} \frac{n^{-1}}{6^n}.$$

Applichiamo il criterio del rapporto e otteniamo

$$\lim_n \frac{\begin{pmatrix} 3n+3 \\ n+1 \end{pmatrix} \frac{1}{(n+1)\ 6^{n+1}}}{\begin{pmatrix} 3n \\ n \end{pmatrix} \frac{1}{n\ 6^n}}$$

$$= \lim_n \frac{\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!\ (n+1)n!} \frac{1}{(n+1)\ 6\ 6^n}}{\frac{(3n)!}{(2n)!\ n!} \frac{1}{n\ 6^n}}$$

$$= \lim_n \frac{n(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{6(2n+2)(2n+1)(n+1)^2} = \frac{27}{24} > 1 \,.$$

La serie diverge.

Esercizio 1.9. *Discutere la convergenza del seguente integrale al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\tan x - \alpha \sin x}\, dx \,.$$

Notiamo innanzitutto che la funzione non è definita in $x = 0$. Dobbiamo quindi studiare l'ordine di infinitesimo del denominatore. Approssimiamo quindi il denominatore usando il polinomio di Taylor

$$\tan x - \alpha \sin x = (x + \tfrac{1}{3}x^3) - \alpha(x - \tfrac{1}{6}x^3) + R_3(x)\,, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{R_3(x)}{x^3} = 0$$

Nel caso particolare $\alpha = 1$ otteniamo

$$\tan x - \sin x = \tfrac{1}{2}x^3 + R_3(x)\,, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{R_3(x)}{x^3} = 0\,,$$

da cui otteniamo che la funzione integranda è tale che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{\tan x - \sin x}}{\frac{1}{x^2}} = 2 \in \mathbb{R}\,.$$

Deduciamo quindi che l'integrando cresce come x^{-2} in un intorno di $x = 0$ e quindi l'integrale non converge.

Consideriamo ora $\alpha \neq 1$, per cui otteniamo

$$\tan x - \sin x = (1 - \alpha)x + R_1(x)\,, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{R_1(x)}{x} = 0\,,$$

da cui segue con ragionamento analogo a sopra

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^\alpha}{\tan x - \alpha \sin x}}{x^{\alpha - 1}} = \frac{1}{1 - \alpha} \in \mathbb{R}\,.$$

Quindi l'integrando cresce come $x^{\alpha-1}$ in un intorno di $x = 0$. Abbiamo la covergenza dell'integrale se $\alpha - 1 > -1$, ovvero se $\alpha > 0$ (ma abbiamo posto $\alpha \neq 1$!).

Quindi *in un intorno destro dell'origine abbiamo la convergenza dell'integrale se $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$*, altrimenti non c'è convergenza.

Il ragionamento seguente (impegnativo) conferiva punteggio extra anche se risolto parzialmente.

Per la discussione dell'integrabilità della funzione bisogna controllare che il denominatore non si annulli in altri punti $x \in (0,1]$. Risolvendo l'equazione $\tan x - \alpha \sin x = 0$ troviamo $\frac{1}{\cos x} - \alpha = 0$ e quindi $\cos x = \alpha^{-1}$, ovvero $x = \arccos \alpha^{-1}$, ricordando che chiediamo $x \in (0,1]$. Quindi l'equazione ha soluzione in questo intervallo se $1 < \alpha \le (\cos 1)^{-1}$.

Per questi valori dobbiamo verificare l'andamento della funzione in un intorno del punto x_α tale che $\cos x_\alpha = \alpha^{-1}$. Per fare questo basta calcolare il polinomio di Taylor di grado uno della funzione in questo punto:

$$\begin{aligned}\tan x - \alpha \sin x &= \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \alpha \cos x\right)_{x=x_\alpha} (x - x_\alpha) + S_1(x)\\ &= (\alpha^2 - 1)(x - x_\alpha) + S_1(x)\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{S_1(x)}{x - x_\alpha} = 0\,.\end{aligned}$$

In un intorno di x_α la funzione integranda va quindi come $\frac{1}{x - x_\alpha}$ che ha integrale divergente. Concludiamo quindi questa parte aggiuntiva concludendo che l'integrale converge se $\alpha \in (0,1) \cup (\frac{1}{\cos 1}, +\infty)$.

Esercizio 1.10. *Discutere la convergenza del seguente integrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - \sin x}{\mathrm{e}^{\pi x} - 1 - \sin(\pi x)}\, dx\,.$$

Innanzitutto notiamo che dovremo discutere la convergenza in un intorno di $x = 0$ e di $+\infty$. Il denominatore si annulla (per $x \ge 0$) solo in zero in quanto $\mathrm{e}^y - 1 > y > \sin y$ per ogni $y > 0$. Notiamo anche che, detta $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1 - \sin x}{\mathrm{e}^{\pi x} - 1 - \sin(\pi x)}$, vale $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$ e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\mathrm{e}^{(1-\pi)x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-x} - \frac{\sin x}{\mathrm{e}^x}}{1 - \mathrm{e}^{-\pi x} - \frac{\sin(\pi x)}{\mathrm{e}^{\pi x}}} = 1,,$$

ovvero la funzione integranda, in un intorno di $+\infty$ *si comporta come* $\mathrm{e}^{(1-\pi)x}$. Quest'ultima funzione è integrabile in senso generalizzato su $[1, +\infty)$, quindi abbiamo la convergenza dell'integrale generalizzato di f su $[1, +\infty)$ per confronto: infatti esiste $\bar{x}$ tale che, per ogni $x \ge \bar{x}$,

$$0 < \frac{f(x)}{\mathrm{e}^{(1-\pi)x}} \le 2 \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x) \le 2\mathrm{e}^{(1-\pi)x}\,.$$

Quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - \sin x}{\mathrm{e}^{\pi x} - 1 - \sin(\pi x)}\, dx \le 2 \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{(1-\pi)x}\, dx \in \mathbb{R}\,.$$

Discutiamo ora la convergenza dell'integrale generalizzato su $(0,1]$. Possiamo calcolare, scrivendo il polinomio di Taylor di grado 2 centrato in $t = 0$,

$$g(t) = \mathrm{e}^t - 1 - \sin t = \frac{1}{2}t^2 + R_2(t)\,, \quad \text{dove } \lim_{t\to 0} \frac{R_2(t)}{t^2} = 0\,.$$

Con una semplice sostituzione troviamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - \sin x}{\mathrm{e}^{\pi x} - 1 - \sin(\pi x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + R_2(x)}{\frac{1}{2}(\pi x)^2 + R_2(\pi x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + 2\frac{R_2(x)}{x^2}}{\pi^2 + 2\pi^2 \frac{R_2(\pi x)}{\pi^2 x^2}} = \frac{1}{\pi^2}\,.$$

La funzione f ha limite finito in zero, allora è integrabile sull'intervallo $(0,1]$.
Concludiamo che l'integrale richiesto è convergente.

Esercizio 1.11. *Determinare il carattere della serie al variare di $x \in \mathbb{R}$.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(\frac{x+2}{x-2} \right)^n .$$

Dopo aver effettuato la sostituzione $y = \frac{x+2}{x-2}$ troviamo una serie di potenze con raggio di convergenza 1, che risulta indeterminata per $y < -1$, assolutamente convergente per $|y| \leq 1$ e divergente per $y > 1$ (scrivere tutti i dettagli per esercizio). A questo punto, una volta disegnato il grafico della funzione $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$, notiamo che

$$\begin{aligned} f(x) < -1 &\iff x \in (0,2)\,, \\ |f(x)| \leq 1 &\iff x \in (-\infty, 0]\,, \\ f(x) > 1 &\iff x \in (2 + \infty)\,. \end{aligned}$$

Concludendo quindi che la serie è indeterminata per $x \in (0,2)$, assolutamente convergente per $x \in (-\infty, 0]$ e divergente per $x \in (2+\infty)$. Ovviamente per $x = 2$, la serie non è ben definita.

Esercizio 1.12. *Discutere la convergenza del seguente integrale al variare di $\alpha > 0$*

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x - 1}{\arctan(\sqrt{x^\alpha})\,\alpha^x}\, dx\,.$$

Dopo aver notato che il denominatore si annulla in $x = 0$, notiamo che dobbiamo discutere la convergenza dell'integrale in un intorno di $x = 0$ e $x = +\infty$. Osserviamo che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x} = 1\,, \quad \lim_{x \to +\infty} \arctan(\sqrt{x^\alpha}) = \frac{\pi}{2}\,,$$

Quindi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{e^x - 1}{\arctan(\sqrt{x^\alpha})\,\alpha^x}}{\frac{e^x}{\alpha^x}} = \frac{2}{\pi}$$

e quindi deduciamo l'esistenza di un certo x_0 tale che per ogni $x > x_0$ vale

$$\frac{1}{2} \left(\frac{e}{\alpha} \right)^x \leq f(x) = \frac{e^x - 1}{\arctan(\sqrt{x^\alpha})\,\alpha^x} \leq \left(\frac{e}{\alpha} \right)^x ,$$

Per confronto con le funzioni presenti al membro sinistro e al membro destro osserviamo che l'integrale generalizzato di f in $[1, +\infty)$ è convergente se e solo se $\alpha > e$.

Passiamo ora ad analizzare la convergenza dell'integrale di f sull'intervallo $(0,1]$. Usando i limiti

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,, \quad \lim_{x \to 0} \alpha^x = 1\,,$$

mostriamo che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{e^x - 1}{\arctan(\sqrt{x^\alpha})\,\alpha^x}}{x^{-(\frac{\alpha}{2} - 1)}} = 1$$

e quindi deduciamo l'esistenza di un certo $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (0, \delta)$ vale

$$\frac{1}{2} x^{-(\frac{\alpha}{2}-1)} \le f(x) = \frac{e^x - 1}{\arctan(\sqrt{x^\alpha})\, \alpha^x} \le 2x^{-(\frac{\alpha}{2}-1)},$$

Per confronto con le funzioni presenti al membro sinistro e al membro destro osserviamo che l'integrale generalizzato di f in $(0,1]$ è convergente se e solo se $\frac{\alpha}{2} - 1 < 1$, cioé se e solo se $\alpha < 4$.

Concludiamo quindi che l'integrale richiesto coverge in senso generalizzato se e solo se $e < \alpha < 4$.

Esercizio 1.13. *Determinare il carattere della serie al variare di $\alpha \ge 0$.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \arctan(\alpha^n).$$

Osserviamo che

$$\lim_n \alpha^n = \begin{cases} 0 & 0 \le \alpha < 1 \\ 1 & \alpha = 1 \\ +\infty & \alpha > 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_n \arctan(\alpha^n) = \begin{cases} 0 & 0 \le \alpha < 1 \\ \frac{\pi}{4} & \alpha = 1 \\ \frac{\pi}{2} & \alpha > 1 \end{cases}$$

Quindi per $\alpha \ge 1$ troviamo che la serie diverge usando il criterio del confronto asintotico: ha lo stesso comportamento di 2^n. Se $\alpha = 0$, la serie è costantemente uguale a zero, quindi ovviamente converge.

Consideriamo quindi il caso $0 < \alpha < 1$. Ricordiamo che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_n \frac{\arctan(\alpha^n)}{\alpha^n} = 1,$$

quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^n \arctan(\alpha^n)}{(2\alpha)^n} = 1,$$

Abbiamo quindi che, per $0 < \alpha < 1$, la serie richiesta ha lo stesso carattere della serie geometrica di ragione 2α.

Concludiamo quindi che abbiamo convergenza se $0 \le \alpha < \frac{1}{2}$, divergenza se $\alpha \ge \frac{1}{2}$.

Esercizio 1.14. *Determinare il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n!}}{n^n\, n!}.$$

L'esercizio si può risolvere applicando sia il criterio del rapporto che quello della radice, vediamo il secondo metodo. Usando la stima $n! < n^n$ otteniamo

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{2^{n!}}{n^n\, n!}} > \lim_n \sqrt[n]{\frac{2^{n\,(n-1)!}}{n^{2n}}} = \lim_n \frac{2^{(n-1)!}}{n^2} = +\infty,$$

dove abbiamo usato che un'esponenziale cresce più di una qualsiasi potenza: per ogni $\alpha > 0$ esiste $\bar{n}$ tale che per ogni $n \ge \bar{n}$ vale $2^{(n-1)!} > 2^n > n^\alpha$.

La serie quindi diverge.

Esercizio 1.15. *Discutere la convergenza della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$$

Apllichiamo il criterio del rapporto:

$$\begin{aligned}
\lim_n \frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)^{2(n+1)}}}{\frac{(2n)!}{n^{2n}}} &= \lim_n \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{2n+2}} \frac{n^{2n}}{(2n)!} \\
&= \lim_n \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^{2n}(n+1)^2} \frac{n^{2n}}{(2n)!} \\
&= \lim_n \frac{(2n+2)(2n+1)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}(n+1)^2} = \frac{4}{\mathrm{e}^2} < 1 \,,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato

$$\lim_n \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4 \,, \qquad \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \lim_n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^2 = \mathrm{e}^2 \,.$$

La serie quindi converge.

Esercizio 1.16. *Discutere la convergenza del seguente integrale generalizzato*

$$\int_0^\infty \frac{\arctan(x^{-1})}{\sqrt[3]{x}}\, dx \,.$$

Inannzitutto dobbiamo discutere la convergenza di due integrali generalizzati, uno in zero l'altro a infinito.

$$\int_0^\infty \frac{\arctan(x^{-1})}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \int_0^1 \frac{\arctan(x^{-1})}{\sqrt[3]{x}}\, dx + \int_1^\infty \frac{\arctan(x^{-1})}{\sqrt[3]{x}}\, dx$$

In zero. Osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \arctan(x^{-1}) = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \exists \delta > 0 \,:\, \forall x \in (0,\delta) \;\; \frac{\arctan(x^{-1})}{\sqrt[3]{x}} \le 2\frac{1}{x^{1/3}}$$

Poiché, essendo $1/3 < 1$,

$$\int_0^1 2\frac{1}{x^{1/3}}\, dx < +\infty \,,$$

allora deduciamo per confronto che

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x^{-1})}{\sqrt[3]{x}}\, dx < +\infty \,.$$

A infinito. In questo caso invece

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x^{-1})}{x^{-1}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists \bar{x} > 0 \,:\, \forall x > \bar{x} \;\; \frac{\arctan(x^{-1})}{\sqrt[3]{x}} \le 2\frac{1}{x^{4/3}} \,,$$

Poiché, essendo $4/3 > 1$,

$$\int_1^\infty 2\frac{1}{x^{4/3}}\, dx < +\infty \,,$$

allora deduciamo per confronto che

$$\int_1^\infty \frac{\arctan(x^{-1})}{\sqrt[3]{x}}\, dx < +\infty \,.$$

L'integrale richiesto è convergente.

1.3 A.A. 2020/2021

Esercizio 1.17. *Discutere la convergenza del seguente integrale generalizzato al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_0^\infty \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x}} - 1)\sinh x}{x^\alpha}\, dx\,.$$

Risoluzione omessa. Vedi Esercizio 1.12.

Esercizio 1.18. *Discutere la convergenza del seguente integrale generalizzato (e, se possibile, darne una stima)*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(1/x)}{\sqrt{|x^2 - 1|}}\, dx\,.$$

Risoluzione omessa. Si noti tuttavia che sarà necessario discutere la convergenza dell'integrale nei punti $-\infty, -1, 0, +1, +\infty$. Essendo la funzione integranda dispari, se l'integrale dovesse risultare convergente, il valore ottenuto sarà necessariamente zero. Il fatto che la funzione sia dispari inoltre ci permette di concludere anche che la funzione è integrabile in senso generalizzato in un intorno di $-\infty$ se e solo se è integrabile in senso generalizzato in un intorno di $+\infty$. Analogamente la funzione è integrabile in senso generalizzato in un intorno di -1 se e solo se è integrabile in senso generalizzato in un intorno di $+1$.

Esercizio 1.19. *Dire per quali valori di* x *converge la seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^{-2})}{\log\left(\dfrac{n+4}{n}\right)} \left(\frac{2x+4}{x-2}\right)^n\,.$$

Risoluzione omessa. Vedi Esercizio 1.11.

Esercizio 1.20. *Dire per quali valori positivi* a, b, c *converge la seguente serie effettuando tutti i calcoli necessari*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^a\ (\log_b n)^c}\,.$$

Risoluzione omessa. Cambiando la base al logaritmo ci si riconduce ad un esercizio presente negli appunti del corso. Usare il metodo della condensata.

Esercizio 1.21. *Spazio per l'esercizio di gennaio*

Esercizio 1.22. *Spazio per l'esercizio di febbraio*

2 Continuità e differenziabilità, problemi di massimo e minimo

2.1 A.A. 2018/2019

Esercizio 2.1. *Discutere, della seguente funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *continuità, esistenza delle derivate parziali e differenziabilità:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Scrivere il valore del gradiente di f al variare di $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Facilmente si vede che la funzione f è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ in quanto rapporto fra polinomi (usando il teorema di continuità del rapporto fra funzioni continue). Calcoliamo le derivate parziali nei punti di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x(x^3+y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{4y^3(x^2+y^2) - 2y(x^3+y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Le derivate parziali quindi esistono in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Quindi per $(x,y) \neq (0,0)$ abbiamo

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x(x^3+y^4)}{(x^2+y^2)^2}, \frac{4y^3(x^2+y^2) - 2y(x^3+y^4)}{(x^2+y^2)^2} \right).$$

Poiché il gradiente è continuo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, per il teorema del differenziale totale la funzione è differenziabile per ogni $(x,y) \neq (0,0)$.

Passiamo ora a studiare le proprietà di f nell'origine $(0,0)$. Per la continuità dobbiamo mostrare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

A questo scopo notiamo che per $(x,y) \neq (0,0)$ possiamo ottenere le seguenti maggiorazioni:

$$|f(x,y)| = \left| \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{|x|^3+y^4}{x^2+y^2} = \frac{x^2\cdot|x|}{x^2+y^2} + \frac{y^2\cdot y^2}{x^2+y^2} \leq |x| + y^2,$$

dove abbiamo usato che $x^2 \leq x^2+y^2$ e $y^2 \leq x^2+y^2$. Valendo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|+y^2 = 0$, possiamo concludere che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, quindi f è continua in zero. Quindi f è continua in tutto il dominio.

Studiamo ora l'esistenza delle derivate parziali in $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{h-0}{h} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{h^2-0}{h} = 0,$$

Concludiamo quindi che le derivate parziali esistono in tutto il dominio.

Studiamo ora la differenziabilità di f in $(0,0)$. Dobbiamo vedere se possiamo mostrare che vale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \tag{5}$$

dove "$\cdot$" denota il prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$, in particolare

$$\nabla f(0,0)\cdot(x,y) = (1,0)\cdot(x,y) = x.$$

Calcoliamo il termine nel limite

$$\begin{aligned}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \frac{\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2}-0-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ &= \frac{x^3+y^4-x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\\ &= \frac{y^4-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,.\end{aligned}$$

Se ci avviciniamo all'origine lungo la retta $y = x$ troviamo che

$$\begin{aligned}\frac{f(t,t)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(t,t)}{\sqrt{t^2+t^2}} &= \frac{t^4-t^3}{2^{3/2}|t|^{3/2}}\\ &= 2^{-3/2}\left(\sqrt{|t|}+\frac{t}{|t|}\right)\end{aligned}$$

dove il secondo addendo in parentesi non ammette limite per $t \to 0$. Quindi non può valere il limite (5).

Quindi f non è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 2.2. *Dato l'insieme*

$$E = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, |y| \le \sqrt{3}x\,,\ x^2+y^2\le 2\right\},$$

determinare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = x^4 - x^2 + y^2$ *nell'insieme* E *dopo aver dimostrato che questi esistono.*

La funzione ammette massimo e minimo su E in quanto l'insieme è chiuso e limitato (infatti è un sottinsieme della palla di $\mathbb{R}^2$ di raggio $\sqrt{2}$ centrata nell'origine.

Osserviamo che l'insieme E è simmetrico rispeto all'asse delle x e vale $f(x,y) = f(x,-y)$. Questa simmetria della funzione ci faciliterà lo studio del problema. Inoltre vale anche $f(x,y) = f(-x,y)$, ma tale proprietà risulta utile in questo caso solo nella ricerca dei punti critici.

Cerchiamo innanzitutto i punti critici di f, che risulta una funzione di classe C^∞, essendo un polinomio. I punti critici sono quindi solo i punti che soddisfano $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Risolvendo quindi il sistema

$$\nabla f(x,y) = (4x^3-2x, 2y) = (0,0) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}2x(2x^2-1)=0\\ 2y=0\end{cases}$$

troviamo i punti critici $(0,0)$ e $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0)$. La matrice Hessiana della funzione è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2-2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Valutando questa nei punti critici otteniamo

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \qquad \text{and} \qquad H_f(\pm\tfrac{1}{\sqrt{2}},0) = \begin{pmatrix} 4 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Quindi l'origine è un punto di sella (un autovalore positivo e uno negativo), gli altri due punto sono di minimo locale (due autovalori positivi). Poiché $(\frac{1}{\sqrt{2}},0) \in E$, esso dovrà essere considerato come possibile minimo della funzione f su E. Quindi calcoliamo

- $f(\frac{1}{\sqrt{2}},0) = -\frac{1}{4}$.

Passiamo alla seconda parte del problema. Abbiamo già individuato un punto interno candidato ad essere punto di minimo. Studiamo quindi la frontiera dell'insieme E. Disegnando E notiamo che la sua frontiera presenta tre *spigoli* nei punti $(0,0)$ e $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})$, che sono quindi da considerare fra i candidati punti di estremo:

- $f(0,0) = 0$,
- $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}) = \frac{5}{4}$.

La parità della funzione nella variabile y ci permette di studiare solo l'insieme $E^+ = \{(x,y) \in E \mid y \geq 0\}$. Questo accorgimento ci permette, *dopo aver aggiunto il punto candidato* $(\sqrt{2},0)$ con valore

- $f(\sqrt{2},0) = 2$

di studiare massimi e minimi locali negli insiemi

$$\partial E_1 = \{(x,y) \mid y = \sqrt{3}x\,,\ x \in (0,\tfrac{1}{\sqrt{2}})\}\,,$$
$$\partial E_2 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 2\,,\ x \in (\tfrac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2})\}\,.$$

La semplice sostituzione $y = \sqrt{3}x$ ci permette di studiare gli estremi locali di f su ∂E_1 tramite lo studio della funzione

$$g(x) = f(x,\sqrt{3}x) = x^4 - x^2 + 3x^2 = x^4 + 2x^2\,, \quad x \in (0,\tfrac{1}{\sqrt{2}})$$

che è crescente nell'intervallo considerato in quanto

$$g'(x) = 4x^3 + 4x = 4x(x^2+1) > 0\,, \quad \forall x > 0\,.$$

Non ha quindi punti di estremo locale. La sostituzione $y^2 = 2 - x^2$ ci permette di studiare gli estremi locali di f su ∂E_2 tramite lo studio della funzione

$$h(x) = f(x,y)|_{y^2=2-x^2} = x^4 - x^2 + 2 - x^2 = x^4 - 2x^2 + 2\,, \quad x \in (\tfrac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2})\,.$$

La derivata $h'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2-1)$ si annulla per $x = -1,0,1$, di cui $x = 1$ appartiene all'intervallo considerato. Quindi il candidato risulta $(1,1)$ con

- $f(1,1) = 1$

(Uno studio più dettagliato porterebbe alla conclusione che si tratta di un minimo locale di h, ma non necessariamente di un minimo locale di f ristretta all'insieme E).

Concludiamo, confrontando i candidati nelle formule segnate con •, che $\min_E f = -\frac{1}{4}$ e $\max_E f = 2$.

Alternative: se non notiamo la parità della funzione rispetto all'asse x possiamo semplicemente calcolare gli estremi locali di f sugli insiemi

$$\begin{aligned}
\partial E_1 &= \{(x,y) \mid y = \sqrt{3}x\,,\ x \in (0, \tfrac{1}{\sqrt{2}})\}\,,\\
\partial E_1^{bis} &= \{(x,y) \mid y = -\sqrt{3}x\,,\ x \in (0, \tfrac{1}{\sqrt{2}})\}\,,\\
\partial E_2^{bis} &= \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 2\,,\ y \in (-\tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})\}\,.
\end{aligned}$$

I calcoli per ∂E_1^{bis} sono analoghi a quelli per ∂E_1 già visti sopra. Nel caso di ∂E_2^{bis} si potrebbero scomodare i moltiplicatori di Lagrange. In questo caso il punto $(\sqrt{2},0)$ risolverà il sistema e non emergerà da considerazioni legate alla simmetria dell'insieme. Dobbiamo quindi risolvere:

$$\begin{cases} 2x(2x^2-1) = \lambda 2x \\ 2y = \lambda 2y \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x(2x^2-1-\lambda) = 0 \\ 2y(1-\lambda) = 0 \\ x^2+y^2 = 2\,. \end{cases}$$

Ha senso studiare prima la seconda equazione che porta alla scelta di $y = 0$ o $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} 2x(2x^2-1-\lambda) = 0 \\ y = 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (\pm\sqrt{2},0)\,,$$

$$\begin{cases} 2x(2x^2-2) = 0 \\ \lambda = 1 \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = 1 \\ y^2 = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ \lambda = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

Quindi troviamo i punti

$$(0,\pm\sqrt{2})\,,\ (\pm1,\pm1).$$

I punti $(\sqrt{2},0)$ e $(1,\pm1)$ appartengono all'insieme ∂E_2^{bis} e vanno considerati. Si noti infatti che il sistema impostato con i moltiplicatori di Lagrange ci dà tutti i punti di estremo locale di f sull'intera circonferenza di raggio $\sqrt{2}$.

Infine si noti che tutti i punti di estremo trovati sono coerenti con le simmetrie della funzione.

Esercizio 2.3. *Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x,y) = xy^2 - x^2 - 2y^2 + 2x\,,$$

determinarne i punti critici e la loro natura. Dire se la funzione ammette massimi e minimi globali nel suo dominio.

Determinare inoltre massimo e minimo assoluto della funzione f ristretta all'insieme

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 1 \le x \le 7 - y^2\right\},$$

dopo aver spiegato perché questi esistono.

Calcoliamo il gradiente

$$\nabla f(x,y) = (y^2 - 2x + 2\,,\ 2xy - 4y)$$

che si annulla nei punti che risolvono il sistema

$$\begin{cases} y^2 - 2x + 2 = 0 \\ 2y(x-2) = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} 2x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y^2 = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

ovvero i punti $(1,0)$ e $(2, \pm\sqrt{2})$. Per determinarne la natura calcoliamo la matrice hessiana

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 2y \\ 2y & 2x-4 \end{pmatrix}.$$

e valutarla nei punti precedentemente trovati:

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad H_f(2, \pm\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -2 & \pm 2\sqrt{2} \\ \pm 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

Il punto $(1,0)$ risulta punto di massimo locale (due autovalori negativi), mentre per gli altri punti troviamo un determinante negativo (quindi si tratta di punti di sella).

Concludiamo che essendo

$$f(t,t) = t^3 - 3t^2 + t, \qquad \lim_{t \to \pm\infty} f(t,t) = \pm\infty,$$

la funzione non ammette massimi e minimi assoluti su $\mathbb{R}^2$.

Passiamo ora allo studio di f ristretta all'insieme E. L'insieme è chiuso e limitato. La limitezza si ottiene notando che

$$y^2 - 1 \le 7 - y^2 \quad \Rightarrow \quad y \in [-2, 2]$$

e che

$$-1 \le y^2 - 1 \le x \le 7 - y^2 \le 7.$$

Quindi $E \subseteq [-1, 7] \cup [-2, 2]$. La funzione è continua su un compatto, quindi ammette massimo e minimo. La funzione ammette massimo locale interno $(1,0)$ con valore

- $f(1,0) = 1$.

Studiamo ora f sulla frontiera ∂E, che è costituita dai due archi di parabola:

$$\begin{aligned} \partial E_1 :=& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2 - 1, y \in (-2,2)\} \\ =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2 - 1, x \in [-1,3)\}, \\ \partial E_2 :=& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 7 - y^2, y \in (-2,2)\} \\ =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 7 - y^2, y \in (3,7]\}, \end{aligned}$$

separati dai punti $(3, \pm 2)$ tali che

- $f(3, \pm 2) = 1$.

Studiando f ristretta a ∂E_1 troviamo

$$g_1(x) = f(x,y)|_{y^2 = x+1} = x - 2, \qquad x \in [-1, 3),$$

che dà come candidato punto $(-1,0)$ tale che

$$\bullet \quad f(-1,0) = -3\,.$$

Analogamente, per f ristretta a ∂E_2 troviamo

$$g_1(x) = f(x,y)|_{y^2=7-x} = -2x^2 + 11x - 14\,, \qquad x \in (3,7]\,,$$

che, essendo monotona decrescente dà come candidato il punto di estremo $(7,0)$ tale che

$$\bullet \quad f(7,0) = -35\,.$$

Riassumendo troviamo, confrontando i candidati nelle formule segnate con $\bullet$, che $\min_E f = -35$ e $\max_E f = 1$ (raggiunto in tre punti distinti).

Esercizio 2.4. *Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2\,,$$

determinarne i punti critici e la loro natura.

Determinare inoltre massimo e minimo assoluto della funzione f ristretta all'insieme

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z\,, y = z^2\right\},$$

dopo aver spiegato perché questi esistono.

La funzione f ammette come unico punto critico l'origine $O = (0,0,0)$. Lo studio della matrice hessiana in questo punto porta alla conclusione che si tratta di un punto di sella (dettagli per esercizio).

Mostriamo che l'insieme chiuso E è anche limitato. A questo scopo scriviamo

$$z = x^2 + y^2 \geq y^2 = z^4 \quad \Rightarrow \quad z \geq z^4\,,$$

che ha soluzioni $z \in [0,1]$. A questo punto deve essere $x^2 + y^2 = z \leq 1$. Quindi concludiamo ad esempio che

$$E \subseteq [-1,1] \times [-1,1] \times [0,1]\,.$$

Essendo la funzione continua, esistono massimo e minimo di f su E che si può scrivere come insieme di livello zero per la funzione

$$F(x,y,z) = (x^2 + y^2 - z\,,\ y - z^2)\,.$$

Per individuare i punti di estremo, usiamo il teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Dapprima notiamo che

$$J_F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -1 \\ 0 & 1 & -2z \end{pmatrix}$$

non ha rango massimo se $x = 0$ e $4yz = 1$. Nessun punto di E soddisfa queste due richieste, infatti la validità della prima implica $y^2 = z$ e $y = z^2$, valide solo se $y = z = 0$ oppure $y = z = 1$. Quindi J_F ha rango massimo in tutti i punti di E.

Impostiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 2x = \lambda 2x \\ 2y = \lambda 2y + \mu \\ -2z = -\lambda - \mu 2z \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} 2x(1-\lambda) = 0 \\ 2y(1-\lambda) = \mu \\ 2z(\mu - 1) = -\lambda \\ x^2 + y^2 = z \\ y = z^2 \end{cases}$$

e distinguiamo i casi $x = 0$ e $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2y(1-\lambda) = \mu \\ 2z(\mu - 1) = -\lambda \\ y^2 = z \\ y = z^2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad (x,y,z) \in \{(0,0,0),(0,1,1)\}$$

(ignorando la seconda e terza equazione)

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ 0 = \mu \\ z = \frac{1}{2} \\ x^2 = \frac{7}{16} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad (x,y,z) = (\pm\tfrac{\sqrt{7}}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2})$$

Riassumendo troviamo

- $f(0,0,0) = 0\,,$ • $f(0,1,1) = 0\,,$ • $f(\pm\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}\,.$

Concludiamo che $\min_E f = 0$ e $\max_E f = \frac{1}{4}$.

Esercizio 2.5. *Data la funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$f(x,y) = x^3 - x^2y + y^2 - x^2 - xy + 2y - x\,,$$

determinarne i punti critici e la loro natura.

Determinare inoltre massimo e minimo assoluto della funzione f *ristretta all'insieme*

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \le y - 1 \le x\right\},$$

dopo aver spiegato perché questi esistono.

Calcoliamo gradiente ed hessiana della funzione f:

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 2xy - 2x - y - 1\,,\, -x^2 + 2y - x + 2)\,,$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x - 2y - 2 & -2x - 1 \\ -2x - 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo dove si annulla il gradiente:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy - 2x - y - 1 = 0 \\ y = \frac{1}{2}(x^2 + x - 2) \end{cases} \qquad \Rightarrow \cdots \Rightarrow \qquad (x,y) \in \{(0,-1),(\tfrac{1}{2},-\tfrac{5}{8}),(1,0)\}$$

dove i calcoli sono lasciati per esercizio. Valutiamo la matrice hessiana in questi punti:

$$H_f(0,-1) = \begin{pmatrix} -8 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$H_f(\tfrac{1}{2},-\tfrac{5}{8}) = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

I primi due punti hanno matrice hessiana con determinante negativo, quindi autovalori di segno opposto: sono punti di sella. Invece il terzo punto ha matrice hessiana con determinante e traccia positivi, quindi due autovalori positivi: è un punto di minimo locale con valore $f(\frac{1}{2},-\frac{5}{8}) = -\frac{65}{64}$.

Passiamo allo studio di f ristretta all'insieme chiuso E, che risulta limitato essendo $E \subseteq [0,1]\times[1,2]$: infatti dalla disequazione $x^2 \leq x$ segue che $x \in [0,1]$, quindi troviamo $0 \leq x^2 \leq y-1 \leq x \leq 1$ che porta a $y \in [1,2]$.

La funzione è continua, quindi per il teorema di Weierstrass, ha massimo e minimo su E. Notiamo che il candidato $(\frac{1}{2},-\frac{5}{8})$ non appartiene a questo insieme.

Studiamo quindi la frontiera ∂E, che risulta costituita da un segmento e un arco di parabola.

$$\begin{aligned}\partial E_1 :=& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x+1\,,\, x \in (0,1)\}\,,\\ \partial E_2 :=& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2+1\,,\, x \in (0,1)\}\,,\end{aligned}$$

e dai punti $(0,1)$ e $(1,1)$ tali che

- $f(0,1) = f(1,1) = 3\,.$

La funzione f ristretta a ∂E_1 porta alla funzione (calcoli per esercizio)

$$g(x) = \ldots = -2x^2 + 2x + 3\,, \qquad x \in (0,1)\,,$$

con derivata $g'(x) = -4x+2$ che si annulla in $x = \frac{1}{2}$ con derivata seconda negativa individuando un punto di massimo locale (su ∂E_1!). Abbiamo quindi il candidato $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ con valore

- $f(\frac{1}{2},\frac{3}{2}) = \frac{7}{2}\,.$

Similmente, la funzione f ristretta a ∂E_2 porta alla funzione (calcoli per esercizio)

$$h(x) = \ldots = 2x^2 - 2x + 3\,, \qquad x \in (0,1)\,,$$

con derivata $g'(x) = 4x-2$ che si annulla in $x = \frac{1}{2}$ con derivata seconda positiva individuando un punto di minimo locale (su ∂E_2!). Abbiamo quindi il candidato $(\frac{1}{2},\frac{5}{4})$ con valore

- $f(\frac{1}{2},\frac{5}{4}) = \frac{5}{2}\,.$

Confrontando i valori assunti nei punti candidati, notiamo che $\min_E f = \frac{5}{2}$ e $\max_E f = \frac{7}{2}$.

Esercizio 2.6. *Data la funzione $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x,y) = xy^2 + 5xy - 8y^2 - 40y$$

determinarne i punti critici e la loro natura.

Determinare inoltre gli eventuali punti di estremo vincolato della funzione f ristretta all'insieme

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 2\right\}.$$

Verificare se f assume massimo e minimo assoluto su E (si chiedono i punti di estremo, non il valore assunto!).

Calcoliamo gradiente ed hessiana della funzione f:

$$\nabla f(x,y) = (y^2 + 5y\,,\, 2xy + 5x - 16y - 40)\,,$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2y+5 \\ 2y+5 & 2x-16 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo dove si annulla il gradiente:

$$\begin{cases} y(y+5) = 0 \\ 2xy + 5x - 16y - 40 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 8 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -5 \\ x = 8 \end{cases}$$

e valutiamo la matrice hessiana in questi punti:

$$H_f(8,0) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(8,-5) = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Concludiamo quindi che i punti sono entrambi di sella essendo negativi i determinanti delle due matrici.

Passiamo ora allo studio di f ristretto ad E, insieme chiuso e non limitato: è un'iperbole equilatera. Notiamo che i valori assunti dalla funzione f su E possono essere espressi rispetto alla sola variabile y:

$$g(y) = f(x,y)|_{xy=2} = 2y + 10 - 8y^2 - 40y = -8y^2 - 38y + 10\,, \quad y \neq 0\,.$$

Poiché $g'(x) = -16y - 38$ si annulla per $y = -\frac{19}{8}$ con derivata seconda negativa troviamo che il punto $(-\frac{16}{19}, -\frac{19}{8})$ è punto di massimo locale di f ristretta ad E (si noti che la consegna non chiede il valore assunto). Facilmente notiamo inoltre che

$$\lim_{\substack{(x,y) \in E \\ y \to \pm\infty}} f(x,y) = \lim_{y \to \pm\infty} g(x) = -\infty$$

quindi $f|_E$ non ammette minimo assoluto. Invece

$$\lim_{\substack{(x,y) \in E \\ x \to \pm\infty}} f(x,y) = \lim_{y \to 0} g(x) = 0\,,$$

che porta a concludere che $f|_E$ ammette massimo assoluto nel punto $(-\frac{16}{19}, -\frac{19}{8})$ precedentemente individuato.

2.2 A.A. 2019/2020

Esercizio 2.7. *Classificare i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x,y) = 2y^2 - 2y(\sin x + \cos x) + \sin(2x)\,.$$

Disegnare l'insieme

$$E = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| \le \pi\,,\, |xy| \le 1\Big\}$$

e determinare, se esistono,

$$\min_{\mathbb{R}^2} f \quad , \quad \max_{\mathbb{R}^2} f \quad ; \quad \min_{E} f \quad , \quad \max_{E} f\,.$$

Dopo aver notato che la funzione è di classe almeno C^2, calcoliamo gradiente e matrice hessiana:

$$\nabla f(x,y) = \big(-2y\cos x + 2y\sin x + 2\cos(2x)\,,\, 4y - 2(\sin x + \cos x)\big)$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y\sin x + 2y\cos x - 4\sin(2x) & -2\cos x + 2\sin x \\ -2\cos x + 2\sin x & 4 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo i punti in cui si annulla il gradiente risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \cos(2x) = y(\cos x - \sin x) \\ y = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos(2x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x) \\ y = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{3}{2}\cos(2x) = 0 \\ y = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ y = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) \end{cases}$$

da cui troviamo i punti candidati

$$\Big(\tfrac{1}{4}\pi + 2k\pi\,,\, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\Big), \quad \Big(\tfrac{3}{4}\pi + 2k\pi\,,\, 0\Big), \quad \Big(\tfrac{5}{4}\pi + 2k\pi\,,\, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\Big), \quad \Big(\tfrac{7}{4}\pi + 2k\pi\,,\, 0\Big).$$

In corrispondenza di questi punti valutiamo la matrice hessiana:

$$H_f\Big(\tfrac{1}{4}\pi + 2k\pi\,,\, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\Big) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} H_f\Big(\tfrac{3}{4}\pi + 2k\pi\,,\, 0\Big) = \begin{pmatrix} 4 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

$$H_f\Big(\tfrac{5}{4}\pi + 2k\pi\,,\, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\Big) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} H_f\Big(\tfrac{7}{4}\pi + 2k\pi\,,\, 0\Big) = \begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $\Big(\frac{1}{4}\pi + 2k\pi\,,\, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big)$ e $\Big(\frac{5}{4}\pi + 2k\pi\,,\, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big)$ sono punti di sella essendo il determinante della matrice hessiana negativo in questi punti. Gli altri presentano determinante positivio, quindi dal segno della traccia segue che i punti $\Big(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\,,\, 0\Big)$ e $\Big(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\,,\, 0\Big)$ sono tutti minimi locali stretti con valore

- $f\Big(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\,,\, 0\Big) = f\Big(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\,,\, 0\Big) = -1\,.$

La funzione è periodica di periodo 2π nella x e limitata inferiormente, ma non superiormente, infatti

$$2y^2 - 4y - 1 \le f(x,y) \le 2y^2 + 4y + 1\,.$$

Quindi un eventuale minimo sarà raggiunto ad esempio nell'insieme $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}$. Poiché $\lim_{|y|\to+\infty} 2y^2 - 4y - 1 = +\infty$ allora la funzione f ammetterà minimo (infatti ogni successione che tende a $\inf_{[0,2\pi]\times\mathbb{R}} f$ sarà contenuta in un insieme limitato, quindi compatto e ammetterà una sottosuccessione convergente ad un punto che sarà punto di minimo). Quindi vale $\min_{\mathbb{R}^2} f = -1$.

L'insieme E è chiuso ma non limitato, infatti contiene l'asse y. Inoltre la funzione $g(y) = f(0,y) = 2y^2 - 2y$ è superiormente illimitata, quindi la funzione non ammette massimo su E. Notiamo poi che il minimo globale di f viene raggiunto in un punto appartenente ad E, quindi $\min_E f = -1$.

Esercizio 2.8. *Determinare la continuità e differenziabilità di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ al variare di $\beta \in \mathbb{R}$:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(y+1)-y^2(y-1)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0)\,, \\ \beta & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Innanzitutto, per ogni valore di $\beta \in \mathbb{R}$, avremo che f sarà continua e differenziabile almeno in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ prevedendo che le derivate parziali di f saranno rapporti tra polinomi, quindi funzioni continue che permetteranno di applicare il teorema del differenziale totale.

Notiamo che $f(x,0) = 1$ per ogni $x \neq 0$, quindi la funzione f non è continua se $\beta \neq 1$. Quindi consideriamo da qui in avanti solo il caso $\beta = 1$. Per verificare la continuità in questo caso dobbiamo mostrare che

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) - 1 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y - y^3}{x^2+y^2}\,.$$

La tesi segue dalle seguenti maggiorazioni

$$\left|\frac{x^2y - y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{x^2|y| + y^2|y|}{x^2+y^2} = |y| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0\,.$$

Calcoliamo le derivate parziali nell'origine:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to0} \frac{1-1}{t} = 0\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to0} \frac{(1-t)-1}{t} = -1\,.$$

La funzione non è differenziabile, infatti dalla stima

$$\left|\frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|$$
$$= \left|\frac{\frac{x^2(y+1)-y^2(y-1)}{x^2+y^2} - 1 - (0,-1)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right|$$

notiamo che ponendo $(x,y) = (t,t)$ — ovvero considerando la restrizione sulla retta $y = x$ — troviamo la funzione $\frac{2t^3}{|t|^3}$ che non ammette limite in zero.

Esercizio 2.9. *Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x,y,z) = \frac{e^{xy}\,z}{1+z^2}\,,$$

studiare il carattere dei suoi punti critici. Quindi individuare minimo e massimo di f sull'insieme

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2\right\}.$$

Dopo aver notato che la funzione è di classe almeno C^2 su $\mathbb{R}^3$, calcoliamo il gradiente e la matrice hessiana:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(y\mathrm{e}^{xy}\frac{z}{1+z^2}\,,\, x\mathrm{e}^{xy}\frac{z}{1+z^2}\,,\, \mathrm{e}^{xy}\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} \right),$$

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2\mathrm{e}^{xy}\frac{z}{1+z^2} & (1+xy)\mathrm{e}^{xy}\frac{z}{1+z^2} & y\mathrm{e}^{xy}\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} \\ (1+xy)\mathrm{e}^{xy}\frac{z}{1+z^2} & x^2\mathrm{e}^{xy}\frac{z}{1+z^2} & x\mathrm{e}^{xy}\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} \\ y\mathrm{e}^{xy}\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} & x\mathrm{e}^{xy}\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} & \mathrm{e}^{xy}\frac{2z(z^2-3)}{(1+z^2)^3} \end{pmatrix}$$

Per trovare i punti dove si annulla il gradiente dobbiamo risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} yz = 0 \\ xz = 0 \\ 1-z^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz = 0 \\ xz = 0 \\ z = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y0 \\ x = 0 \\ z = \pm 1 \end{cases}$$

e poi valutare la matrice hessiana nei punti trovati

$$H_f(0,0,\pm 1) = \begin{pmatrix} 0 & \pm\frac{1}{2} & 0 \\ \pm\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \mp\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda il punto $(0,0,1)$ abbiamo l'autovalore $-\frac{1}{2}$ e un determinante positivo, quindi i possibili segno degli autovalori sono $+++$ oppure $+--$. Ne consegue che l'unica alternativa possibile è la seconda. Siamo quindi in presenza di un punto di sella. Per quanto riguarda il punto $(0,0,-1)$ abbiamo l'autovalore $\frac{1}{2}$ e un determinante negativo, quindi i possibili segno degli autovalori sono $-++$ oppure $---$. Ne consegue che l'unica alternativa possibile è la prima. Siamo quindi in presenza di un altro punto di sella. Non abbiamo quindi candidati punti di minimo o massimo locale per f.

Passiamo ora allo studio di massimo e minimo su E. Osserviamo innanzitutto che E non è limitato, ma è chiuso. Tuttavia applicando il teorema di Weierstrass la funzione e^{xy} ammette massimo sull'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 2\}$, che chiamiamo M. Quindi abbiamo

$$|f(x,y,z)| \leq M\left|\frac{z}{1+z^2}\right| \xrightarrow{|z|\to\infty} 0\,.$$

La funzione f è quindi limitata su E. Cerchiamo i punti di estremo locale su $\partial E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 2\}$ adottando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} y\mathrm{e}^{xy}\frac{z}{1+z^2} = \lambda x \\ x\mathrm{e}^{xy}\frac{z}{1+z^2} = \lambda y \\ \mathrm{e}^{xy}\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} = 0 \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pm\frac{1}{2}y\mathrm{e}^{xy} = \lambda x \\ \pm\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{xy} = \lambda y \\ z = \pm 1 \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases}$$

e sostituendo $\mu = \pm 2\lambda$ troviamo

$$\begin{cases} y\mathrm{e}^{xy} = \mu x \\ x\mathrm{e}^{xy} = \mu y \\ z = \pm 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\mathrm{e}^{xy} = \mu \mathrm{e}^{-xy}\mu y \\ x\mathrm{e}^{xy} = \mu y \\ z = \pm 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(\mathrm{e}^{2xy} - \mu^2) = 0 \\ x\mathrm{e}^{xy} = \mu y \\ z = \pm 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

di cui distinguo i casi $y = 0$ e $\mathrm{e}^{xy} = \pm\mu$, di cui il primo, notiamo, non porta a soluzioni:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z = \pm 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} \mathrm{e}^{xy} = \pm\mu \\ x = \pm y \\ z = \pm 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Il sistema a destra porta alle soluzioni elencate qui sotto, di cui calcoliamo subito i valori

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= \tfrac{\mathrm{e}}{2} & f(1,1,-1) &= -\tfrac{\mathrm{e}}{2} \\ f(1,-1,1) &= \tfrac{1}{2\mathrm{e}} & f(1,-1,-1) &= -\tfrac{1}{2\mathrm{e}} \\ f(-1,1,1) &= \tfrac{1}{2\mathrm{e}} & f(-1,1,-1) &= -\tfrac{1}{2\mathrm{e}} \\ f(-1,-1,1) &= \tfrac{\mathrm{e}}{2} & f(-1,-1,-1) &= -\tfrac{\mathrm{e}}{2} \end{aligned}$$

Concludiamo quindi che f ha minimo $-\frac{\mathrm{e}}{2}$ e massimo $\frac{\mathrm{e}}{2}$.

Esercizio 2.10. *Della seguente funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ determinare i punti del dominio in cui è continua e quelli in cui è differenziabile.*

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & (x,y,z) \neq (0,0,0)\,, \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0)\,. \end{cases}$$

Consideriamo un punto diverso dall'origine. In questo caso la funzione è continua e differenziabile, infatti possiamo calcolare le derivate parziali facilmente usando le usuali regole di derivazione e notare che anche queste sono continue nei punti diversi dall'origine (calcolare per esercizio il gradiente di f). Quindi usando il teorema del differenziale totale, notiamo che la funzione è differenziabile in ogni punto diverso dall'origine.

Studiamo ora la continuità di f nell'origine. Essa è conseguenza immediata delle seguenti stime:

$$\left| \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} \right| \leq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}{x^2 + y^2 + z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \overset{(x,y,z)\to(0,0,0)}{\longrightarrow} 0$$

dove abbiamo usato che

$$\max\{|x|, |y|, |z|\} = \|(x,y,z)\|_\infty \leq \|(x,y,z)\|_2 = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}\,.$$

Notiamo che $f(x,0,0) = f(0,y,0) = f(0,0,z) = 0$ da cui segue

$$\nabla f(0,0,0) = (0,0,0)\,.$$

Quindi per studiare la differenziabilità di f dobbiamo controllare se il seguente limite dà valore zero:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} - 0 - \langle (0,0,0)\,,\,(x,y,z)\rangle}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$
$$= \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,.$$

Tale limite non fa zero, infatti se ci avviciniamo all'origine lungo la semiretta $r(t) = (t,t,t)$, $t > 0$ troviamo

$$\left.\frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right|_{(x,y,z)=(t,t,t)} = \frac{t^3}{|t|^3} \xrightarrow{t\to 0^+} = 1 \neq 0\,.$$

Concludiamo quindi che la funzione f è continua ma non differenziabile nell'origine.

Esercizio 2.11. *Dato l'insieme*

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2 \leq y^2 + z^2 \leq 12\right\}$$

e la funzione $f : E \to \mathbb{R}$ definita come $f(x,y,z) = x^2 e^{-(x^2+y^2+z^2)}$, determinare massimo e minimo di f su E e i punti in cui questi sono raggiunti.

La funzione è di classe almeno C^2, ne calcoliamo il gradiente:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(2x(1-x^2)\,,\, -2x^2y\,,\, -2x^2z\right)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

I punti in cui si annulla il gradiente sono:

$$(0,y,z)\,,\ \text{con } (y,z) \in \mathbb{R}^2\,, \quad (\pm 1,0,0)\,.$$

Di questi, solo l'origine appartiene all'insieme E (alla frontiera di E per l'esattezza). Notiamo che $f(0,0,0) = 0$.

L'esercizio diventa più semplice notando le simmetrie della funzione e dell'insieme, trovarle per esercizio.

La frontiera di E può essere così descritta:

$$\begin{aligned}\partial E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2 = y^2 + z^2\,, |x| < 2\}&\\ \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = 12\,, |x| < 2\}&\\ \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = 12\,, |x| = 2\} \cup \{0,0,0\}\,.&\end{aligned}$$

Sul sottinsieme della frontiera $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2 = y^2 + z^2\,, |x| < 2\}$ abbiamo, usando l'identità $3x^2 = y^2 + z^2$:

$$f(x,y,z) = x^2 e^{-(x^2+y^2+z^2)} = x^2 e^{-4x^2}\,.$$

Consideriamo quindi la funzione $g : (-2,2) \to \mathbb{R}$, definita come $g(x) = x^2 e^{-4x^2}$. Troviamo

$$g'(x) = 2x(1-4x^2)e^{-4x^2}$$

che si annulla per $x = 0, \pm\frac{1}{2}$, dove la funzione assume i valori

$$g(0) = 0\,, \qquad g(\pm\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{4e}\,.$$

In modo analogo possiamo considerare il pezzo di frontiera $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = 12\,, |x| < 2\}$. In questi punti abbiamo:

$$f(x,y,z) = x^2 e^{-(x^2+y^2+z^2)} = x^2 e^{-(x^2+12)}\,.$$

La funzione $h : (-2,2) \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 e^{-(x^2+12)}$ ha derivata

$$h'(x) = 2x(1-x^2)e^{-(x^2+12)}$$

che si annulla per $x = 0, \pm 1$. Troviamo

$$h(0) = 0\,, \qquad h(\pm 1) = e^{-13}\,.$$

Infine nei punti di $F_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = 12\,, |x| = 2\}$ la funzione vale sempre $4e^{-16}$.

Dei candidati trovati il valore minimo è 0, il massimo è $(4e)^{-1}$. Troviamo quindi che f ha minimo zero (non è sorprendente visto che la funzione f è non negativa) e ha massimo $(4e)^{-1}$. Essi sono raggiunti nei punti:

$$\begin{aligned} f|_E^{-1}(0) &= \{(x,y,z) \in E \mid x = 0\}\,, \\ f|_E^{-1}(\tfrac{1}{4e}) &= \{(x,y,z) \in E \mid x = \pm\tfrac{1}{2}\,, x^2 + y^2 = \tfrac{3}{4}\}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 2.12. *Della seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ discutere continuità e differenziabilità in $O = (0,0)$:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin^2 x \, \dfrac{x-y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Discutere dal punto di vista puramente teorico (ovvero senza fare i calcoli) la procedura da adottare per dimostrare continuità e differenziabilità della stessa funzione negli altri punti del suo dominio.

Notiamo che, se conoscessimo la validità del seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \frac{x-y}{x^2+y^2} = 0$$

allora avremmo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin^2 x \, \frac{x-y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2 x}{x^2} \, x^2 \, \frac{x-y}{x^2+y^2} = 1 \cdot 0 = 0\,.$$

Mostriamo la validità del primo limite con le seguenti maggiorazioni

$$\left| x^2 \frac{x-y}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \big(|x| + |y|\big) \leq |x| + |y| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0\,.$$

La funzione f quindi è continua nell'origine. Calcoliamo le derivate parziali nell'origine:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sin^2 t}{t} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2 t}{t^2} = 1\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0\,.$$

Dobbiamo controllare se il seguente limite vale zero:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2 x \, \frac{x-y}{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

La risposta è no, infatti ponendoci sulla semiretta $r(t) = (t,t)$, $t > 0$, troviamo

$$\left.\frac{\sin^2 x \, \frac{x-y}{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{(x,y)=(t,t)} = -\frac{t}{|t|} = -1\,.$$

La funzione quindi non è differenziabile nell'origine.

Per la seconda parte dell'esercizio, ragioniamo come segue. La funzione è continua e differenziabile, infatti possiamo calcolare le derivate parziali facilmente usando le usuali regole di derivazione e notare che anche queste sono continue nei punti diversi dall'origine (calcolare per esercizio il gradiente d f). Quindi usando il teorema del differenziale totale, notiamo che la funzione è differenziabile in ogni punto diverso dall'origine.

Esercizio 2.13. *Classifica i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $f(x,y) = y^3 - x^2y - y^2 + x^2$.*

Disegna l'insieme

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \le 2 - y \le 4\right\}$$

e determina massimo e minimo della funzione f su E e i punti in cui sono raggiunti.

Calcoliamo il gradiente della funzione

$$\nabla f(x,y,z) = (-2xy + 2x\,,\, 3y^2 - x^2 - 2y)$$

e cerchiamo dove si annulla (scrivere per esercizio i calcoli). Troviamo i punti

$$(0,0)\,, \quad (0,\tfrac{2}{3})\,, \quad (1,\pm 1)\,.$$

Calcoliamo la matrice Hessiana

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2-2y & -2x \\ -2x & 6y-2 \end{pmatrix}$$

e la valutiamo nei punti critici trovati precedentemente e troviamo

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad H_f(0,\tfrac{2}{3}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H_f(\pm 1,1) = \begin{pmatrix} 0 & \mp 2 \\ \mp 2 & 4 \end{pmatrix}$$

che ci permette di concludere che $(0,\frac{2}{3})$ è un punto di minimo locale con valore

- $f(0,\frac{2}{3}) = -\frac{4}{27}$,

mentre gli altri sono punti di sella.

Passiamo ora allo studio di massimo e minimo su E. La frontiera di E si può scrivere come

$$\partial E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2 - x^2 \,,\, |x| < 2\} \\ \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2 \,,\, |x| < 2\} \cup \{(\pm 2, -2)\} \,.$$

Valutiamo innanzitutto la funzione f nei punti $(\pm 2, -2)$:

- $f(\pm 2, -2) = 0$.

Consideriamo ora i punti $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2 - x^2 \,,\, |x| < 2\}$, per i quali troviamo che vale

$$f(x,y) = y^3 - 3y + 2 \,, \quad y \in [-2,2] \,.$$

Ha senso considerare la funzione $g : [-2,2] \to \mathbb{R}$, $g(y) = y^3 - 3y + 2$ con derivata $g'(y) = 3(y^2 - 1)$ che si annulla per $y = \pm 1$. Quindi i candidati estremi sono $(\pm 1, 1)$ e $(\pm\sqrt{3}, -1)$ per cui troviamo:

- $f(\pm 1, 1) = 0$, • $f(\pm\sqrt{3}, -1) = 4$.

Dobbiamo ricordarci di aggiungere come candidato il valore assunto per $y = 2$:

- $f(0,2) = 4$.

Invece, se consideriamo i punti $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2 \,,\, |x| < 2\}$ troviamo

$$f(x,y) = 3x^2 - 12$$

Qui ha senso considerare la funzione $h : [-2,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x^2 - 12$ con minimo in $x = 0$. Abbiamo quindi l'ultimo candidato $(0,-2)$ con valore

- $f(0,-2) = -12$.

Quindi la funzione f, ristretta ad E ha massimo 4 e minimo -12.

Esercizio 2.14. *Disegna l'insieme* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \mathrm{e}^{3x} \le y \le \mathrm{e}^{2x} \,,\, |x| \le 5\}$ *e determina, se esistono, il massimo e il minimo della funzione* $f : A \to \mathbb{R}$ *definita come* $f(x,y) = \mathrm{e}^{3x - \ln y}$.

Il disegno è omesso.

Riscriviamo la funzione come $f(x,y) = \mathrm{e}^{3x}/y$. Notiamo che il gradiente è sempre non nullo:

$$\nabla f(x,y) = \left(3\frac{\mathrm{e}^{3x}}{y} \,,\, -\frac{\mathrm{e}^{3x}}{y^2}\right) .$$

Quindi non abbiamo punti critici all'interno di A. Notiamo inoltre che E è chiuso e limitato. In particolare abbiamo $E \subseteq [-5,0] \times (0,1]$.

Consideriamo quindi il bordo ∂E. Esso è costituito da tre curve di equazioni $\gamma_1 : y = \mathrm{e}^{3x}$, $\gamma_2 : y = \mathrm{e}^{2x}$, $\gamma_3 : x = -5$. La restrizione di f a queste risulta, nell'ordine,

$$\begin{aligned} f|_{\gamma_1}(x,y) &= f(x,\mathrm{e}^{3x}) = 1\,, \\ f|_{\gamma_2}(x,y) &= f(x,\mathrm{e}^{2x}) = \mathrm{e}^{x}\,, \\ f|_{\gamma_3}(x,y) &= f(-5,y) = \mathrm{e}^{-15}/y\,. \end{aligned}$$

La prima è una funzione costante, le altre sono funzioni monotone, quindi non troviamo punti di estremo su queste. Sono invece da considerare tutti i punti della prima curva. Restano da considerare gli "spigoli" di ∂E:

$$f(-5\,,\mathrm{e}^{-15}) = 1\,, f(-5\,,\mathrm{e}^{-10}) = \mathrm{e}^{-5}\,, f(0,1) = 1\,,$$

da cui deduciamo che $\max_E f = 1$ e $\min_E f = \mathrm{e}^{-5}$.

Esercizio 2.15. *Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come $f(x,y,z) = 2xyz$ e l'insieme*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 3\,,\, xy = z\}\,,$$

i. determinare per quali punti di E non è possibile applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange al fine di determinare i massimi e minimi di f su E;

ii. determinare massimo e minimo di f su E, con metodo a piacere.

Si noti che l'insieme E ha interno vuoto ed è intersezione delle due superfici individuate dalle equazioni date. Ci aspettiamo quindi un oggetto simile ad una curva, o più curve.

Non possiamo applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange se il rango della matrice Jacobiana della funzione che descrive i vincoli non è massimo. Abbiamo, scrivendolo in modo comodo per i calcoli successivi, il vincolo

$$F(x,y,z) = \left(\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - \tfrac{3}{2}\,,\, xy - z\right) = (0,0)$$

con matrice Jacobiana

$$J_F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & -1 \end{pmatrix}.$$

Essa non ha rango massimo se tutte le sottomatrici 2x2 hanno determiante nullo.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x + yz = 0 \\ y + xz = 0 \end{cases}$$

Da cui abbiamo la seguente possibilità $x = \pm y$, quindi

$$\begin{cases} x = y \\ x(1+z) = 0 \\ x(1+z) = 0 \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} x = -y \\ x(1-z) = 0 \\ x(1-z) = 0 \end{cases}$$

Dal primo sistema otteniamo i punti del tipo $(0,0,z)$ oppure $(x,x,-1)$, dal secondo i punti del tipo $(0,0,z)$ oppure $(x,-x,1)$. Notiamo che nessuno dei punti può appartenere all'insieme E

$$\begin{aligned}
&(0,0,z) \in E \Rightarrow z = xy = 0 \Rightarrow 0 = x^2 + y^2 + z^2 = 3 \quad \lightning\,, \\
&(x,x,-1) \in E \Rightarrow -1 = z = xy = x^2 \quad \lightning\,, \\
&(x,-x,1) \in E \Rightarrow 1 = z = xy = -x^2 \quad \lightning\,.
\end{aligned}$$

Possiamo applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange in ogni punto di E.

Passiamo alla ricerca di massimo e minimo su E, proprio usando il teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Dobbiamo risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} yz = \lambda x + \mu y \\ xz = \lambda y + \mu x \\ xy = \lambda z - \mu \\ xy = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$$

Sommiamo le prime due equazioni ottenendo il nuovo sistema equivalente

$$\begin{cases} (x+y)(z - \lambda - \mu) = 0 \\ xz = \lambda y + \mu x \\ xy = \lambda z - \mu \\ xy = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$$

da cui separiamo i due casi

$$\begin{cases} x = -y \\ \dots \\ \dots \\ -x^2 = z \\ 2x^2 + x^4 = 3 \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} z = \lambda + \mu \\ \lambda(x - y) = 0 \\ xy = \lambda z - \mu \\ xy = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$$

Dal primo sistema ricaviamo, nell'ultima equazione $x = \pm 1$ da cui i punti $(1,-1,-1)$ e $(-1,1,-1)$. Dal secondo sistema distiguiamo i due casi $\lambda = 0$ e $x = y$

$$\begin{cases} z = \lambda + \mu \\ x = y \\ \dots \\ x^2 = z \\ 2x^2 + z^4 = 3 \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} z = \mu \\ \lambda = 0 \\ xy = -\mu \\ xy = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$$

Dal primo sistema, in modo analogo a quanto fatto prima troviamo i punti $(1,1,1)$ e $(-1,-1,1)$, mentre dal secondo notiamo che la terza e la quarta equazione portano a $z = -\mu$, che unita alla prima ci dà $z = \mu = 0$. Quindi $xy = 0$ unito a $x^2 + y^2 = 3$ ci dà i punti $(\pm\sqrt{3},0,0)$ e $(0,\pm\sqrt{3},0)$.

Concludiamo che abbiamo trovato 8 candidati con valori:

$$f(\pm1,\pm1,1)=2\,,\quad f(\pm1,\mp1,-1)=2\,,\quad f(\pm\sqrt{3},0,0)=0\,,\quad f(0,\pm\sqrt{3},0)=0\,.$$

Quindi $\min_E f = 0$ e $\max_E f = 2$.

Nota: se invece consideriamo l'insieme

$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2+z^2=9\,,\;xy=z\}\,,$$

il procedimento è molto simile, ma fissato $\eta=\sqrt{\sqrt{10}-1}$, troveremo nell'ordine i seguenti candidati: dapprima $(\eta,-\eta,\eta^2)$ e $(-\eta,+\eta,\eta^2)$, poi (η,η,η^2) e $(-\eta,.\eta,\eta^2)$, infine i punti $(\pm3,0,0)$ e $(0,\pm3,0)$.

2.3 A.A. 2020/2021

Esercizio 2.16. *Data la funzione* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *definita come*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{|x|+|y|}\arctan x & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

dire in quali punti è continua e in quali punti è differenziabile.

Per esercizio scrivere i passaggi che nella seguente spiegazione sono introdotti con *si vede facilmente* o espressioni analoghe. Si noti che

$$\frac{x^2-y^2}{|x|+|y|}=\frac{(|x|+|y|)(|x|-|y|)}{|x|+|y|}=|x|-|y|\,.$$

Provare a risolvere l'esercizio anche senza usare questo trucco.

Per provare la continuità e la differenziabilità nell'origine *si ragiona facilmente* come nell'Esercizio 2.12 e situazioni simili, quindi non ne scrivo i dettagli. Invece, data la presenza dei valori assoluti, bisogna studiare se f è differenziabile nei punti $(0,y_0)$ e $(x_0,0)$ dove $x_0\neq0$, $y_0\neq0$. In questi punti *si vede facilmente* che la funzione è continua.

Partiamo con analizzare i punti $(0,y_0)$ con $y_0\neq0$. Essendo $f(0,y)=0$ per ogni $y\in\mathbb{R}$ abbiamo facilmente $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0)=0$, mentre

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,y_0)-f(0,y_0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(|h|-|y_0|)\arctan h}{h}=-|y_0|\,.$$

Quindi per discutere la differenziabilità di f in questo punto dobbiamo controllare se il seguente limite dà risultato zero:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,y_0+k)-f(0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

che diventa, visti i calcoli precedenti

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{(|h|-|y_0+k|)\arctan h+|y_0|h}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

che *si semplifica facilmente* in

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-|k+y_0|\arctan h + |y_0|h}{\sqrt{h^2+k^2}}\,.$$

Aggiungiamo e sottraiamo $|y_0|\arctan h$ e troviamo

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} (|y_0| - |k+y_0|)\frac{\arctan h}{\sqrt{h^2+k^2}} + |y_0|\frac{h-\arctan h}{\sqrt{h^2+k^2}}\,,$$

dove il primo addendo va a zero facilmente, mentre per il secondo usiamo che $\lim \frac{h-\arctan h}{h^3} \in \mathbb{R}$, dove il valore del limite è suggerito dal coefficiente del termine di terzo grado del polinomio di Taylor di grado 3 dell'arcotangente (individuarlo per esercizio).

Passiamo ora ad analizzare i punti $(x_0,0)$ con $x_0 \neq 0$. In questo caso il seguente limite non esiste

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,h)-f(x_0,0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(|x_0|-|h|)\arctan x_0 - |x_0|\arctan x_0}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} -\arctan x_0\frac{|h|}{h}\,.\end{aligned}$$

Da ciò concludiamo che f non è differenziabile in questi punti.

Esercizio 2.17. *Data la funzione* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ *definita come* $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+x+y+z$. *Calcolare* $\min_E f$ *e* $\max_E f$ *(e i punti in cui questi valori vengono assunti), dove*

$$E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \le 4\,,\, |x-y| \le 2 \le z \le 3\}\,.$$

Notiamo che il gradiente di f risulta

$$\nabla f = (2x+1, 2y+1, 2z+1) \neq (0,0,0)\,,\quad \forall (x,y,z)\in E\,.$$

Quindi passiamo subito allo studio sul bordo. Dopo aver disegnato l'insieme $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2\le 4\,, |x-y|\le 2\}$ che è costituito da due quarti di cerchio nel primo e terzo quadrante e da due triangoli nel secondo e quarto quadrante. Il solido E risulta essere un *cilindro* avente A come base: infatti le condizioni su z sono semplicemente $z\in[2,3]$. Il bordo di E quindi presenta le due facce superiori e inferiori

$$A_1 = \{(x,y,3) \,:\, (x,y)\in A\}\,,\quad A_2 = \{(x,y,2) \,:\, (x,y)\in A\}\,,$$

e le facce laterali

$$\begin{aligned}B_1 &= \{(x,y,z) \,:\, x^2+y^2=4\,, x\ge 0\,,\, y\ge 0\,,\, z\in[2,3]\}\,,\\ B_2 &= \{(x,y,z) \,:\, x^2+y^2=4\,, x\le 0\,,\, y\le 0\,,\, z\in[2,3]\}\,,\\ B_3 &= \{(x,y,z) \,:\, y=x+2\,, x\in[-2,0]\,,\, z\in[2,3]\}\,,\\ B_4 &= \{(x,y,z) \,:\, y=x-2\,, x\in[0,2]\,,\, z\in[2,3]\}\,.\end{aligned}$$

Se impostiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange sul vincolo $F_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ che contiene gli insiemi B_1 e B_2 troviamo

$$\begin{cases} 2x + 1 = 2x\lambda \\ 2y + 1 = 2y\lambda \\ 2z + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

che dà come soluzioni solo punti con $z = -\frac{1}{2}$ che non sono punti di $B_1 \cup B_2$. Quindi non troveremo estremi locali su questi insiemi. Impostando i moltiplicatori di Lagrange sui vincolo $F_2(x,y,z) = x - y + 2$ e $F_3(x,y,z) = x - y - 2$ arriviamo alla stessa conclusione.

La cosa non deve stupire dato che l'esercizio si può risolvere anche notando che

$$f(x,y,z) = g(x,y) + h(z)$$

e separando la ricerca di massimi e minimi sugli insiemi $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4\,,\, |x-y| \le 2\,\}$ e $B = \{z \in \mathbb{R} : 2 \le z \le 3\}$. Essendo quindi h monotona crescente su B è chiaro che troveremo il massimo di f in E nell'insieme A_1 e il minimo di f in E nell'insieme A_2.

Notando questo dettaglio tutta la trattazione sopra diventa superflua ed è sufficiente studiare la funzione g sull'insieme A.

Concluderemo poi quindi notando che

$$f(x_m, y_m, z_m) = \min_E f = \min_A g + \min_B h = g(x_m, y_m) + h(2)\,.$$

$$f(x_M, y_M, z_M) = \max_E f = \max_A g + \max_B h = g(x_M, y_M) + h(3)\,.$$

Studiamo ora quindi massimi e minimi della funzione $g(x,y) = x^2 + x + y^2 + y$ nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4\,,\, |x-y| \le 2\,\}$.

Dall'espressione del gradiente $\nabla g = (2x+1, 2y+1)$, troviamo che esso si annulla in $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ e lo studio della matrice Hessiana ci restituisce che è un minimo locale. Il bordo di A è costituito da due segmenti contenuti nelle rette $y = x \pm 2$ (per lo studio della quale si consiglia di sostituire l'espressione della y nella funzione g per ricondursi ad una funzione di una sola variabile), e da due archi della circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ (per cui si consiglia un passaggio in coordinate polari). Lascio i dettagli per esercizio.

Esercizio 2.18. *Data la funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + y^3 - y - |x|\left(\frac{5}{2}x - 6\right),$$

individuare i punti di massimo e minimo locale della funzione (non è necessario fornire il valore assunto). Dimostrare che f *è illimitata sia superiormente che inferiormente. Calcolare, se esiste, l'approssimante lineare di* f *nel punto* $(1,0)$. *Calcolare, se esiste, il polinomio di Taylor di grado 3 approssimante la funzione* f *nel punto* $(1,0)$.

La presenza del termine $|x|$ nella definizione di f ci porta immediatamente a distinguere il comportamento negli insiemi $E_+ = \{(x,y) \mid x > 0\}$, $E_- = \{(x,y) \mid$

$x < 0\}$, $E_0 = \{(x, y) \mid x = 0\}$. Quindi su E_+ avremo

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + y^3 - y - \frac{5}{2}x^2 + 6x\,,$$
$$\nabla f(x,y) = \left(x^2 - 5x + 6\,,\, 3y^2 - 1\right)\,,$$
$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff (x,y) \in \{(2, \pm 3^{-1/2})\,,\, (3, \pm 3^{-1/2})\}$$
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-5 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$
$$H_f(2, \pm 3^{-1/2}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \pm 6 \cdot 3^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad H_f(3, \pm 3^{-1/2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 6 \cdot 3^{-1/2} \end{pmatrix}$$

Quindi abbiamo un massimo locale in $(2, -3^{-1/2})$ e un minimo locale in $(3, 3^{-1/2})$. Gli altri due sono punti di sella. Su E_- avremo invece

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + y^3 - y + \frac{5}{2}x^2 - 6x\,,$$
$$\nabla f(x,y) = \left(x^2 + 5x - 6\,,\, 3y^2 - 1\right)$$
$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff (x,y) \in \{(-6, \pm 3^{-1/2})\,,\, (1, \pm 3^{-1/2})\}$$

I punti $(1, \pm 3^{-1/2})$ sono da scartare in quanto non appartengono a E_-, per gli altri scriviamo

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+5 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$
$$H_f(-6, \pm 3^{-1/2}) = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & \pm 6 \cdot 3^{-1/2} \end{pmatrix}$$

da cui troviamo il massimo locale $(-6, -3^{-1/2})$.

Cerchiamo ora i punti di estremo su E_0 (è la parte parte più difficile dell'esercizio). Definiamo $h(y) = y^3 - y$ e $g(x) = \frac{x^3}{3} - |x|\left(\frac{5}{2}x - 6\right)$, cosicché $f(x,y) = g(x) + h(y)$. Notiamo dapprima che

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{|x|} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{3} - |x|\left(\frac{5}{2}x - 6\right)}{|x|} = 6\,.$$

Quindi esiste $\delta > 0$ tale che se $|x| \le \delta$ allora $g(x) \ge 5|x| \ge 0$. Quindi

$$f(0,y) = h(y) \le g(x) + h(y) = f(x,y)$$

per ogni $(x,y) \in \{(x,y) \mid |x| \le \delta\}$.

Quindi ha senso cercare minimi locali per f in quanto *staccandoci dall'asse $x = 0$ il grafico di f sale.* Osserviamo che h ha estremi in $y = \pm 3^{-1/2}$. In particolare un minimo locale per $y = 3^{-1/2}$ e un massimo locale in $y = -3^{-1/2}$. Quindi possiamo concludere che $(0, 3^{-1/2})$ è un minimo locale per f.

Per dimostrare che f è illimitata basta notare che è illimitata lungo la retta $y = 0$, ovvero $f(0,y) = y^3 - y$ (superiormente e inferiormente). Calcoliamo l'approssimante lineare $\ell(x,y)$ in $(1,0)$:

$$\begin{aligned} \ell(x,y) &= f(1,0) + \langle \nabla f(1,0)\,,\, (x-1, y)\rangle \\ &= \frac{23}{6} + \langle (2,-1)\,,\, (x-1,y)\rangle = \frac{23}{6} + 2x - 2 - y = \frac{11}{6} + 2x - y\,. \end{aligned}$$

La funzione f in un intorno di $(1,0)$ è un polinomio di grado 3, quindi banalmente il polinomio di grado 3 richiesto è semplicemente

$$\frac{x^3}{3} + y^3 - y - \frac{5}{2}x^2 + 6x\,.$$

Esercizio 2.19. *Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita come $f(x,y) = x|y-1| + x^2 - \frac{1}{2}x$ determinare in quali punti è differenziabile e in quali non lo è (motivare la risposta in modo adeguato e completo). Trovare massimo e minimo della funzione f nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 2-y\,,\, |x| \le y\}$.*

Per ogni punto (x,y) con $y \ne 1$ possiamo trovare un intorno in cui la funzione è espressa da un polinomio. Quindi f è differenziabile in tutti i punti di questo tipo. Consideriamo quindi punti del tipo $(x,1)$. Osserviamo che $f(x,1) = x^2 - \frac{1}{2}x$. Quindi sarà possibile calcolare sempre la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}(x,1) = 2x - \frac{1}{2}$. Calcoliamo quindi l'altra derivata parziale

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,1+h) - f(x,1)}{h} = \lim_{h\to 0} x\,\frac{|h|}{h}.$$

Se $x \ne 0$ il limite non esiste. Se $x = 0$ invece il limite esiste e vale zero. Concludiamo quindi che f non è differenziabile nei punti $(x,1)$ con $x \ne 0$. Resta da considerare il caso $(x,y) = (0,1)$ che ammette l'esistenza delle derivate parziali. Dobbiamo vedere se il seguente limite dà risultato zero:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k+1) - f(0,1) - \langle \nabla f(0,1)\,,\,(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

osservando che $f(0,1) = 0$, $\nabla f(0,1) = (-\frac{1}{2}, 0)$. Otteniamo quindi

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h|k| + h^2 - \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h|k| + h^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

in cui si possono usare le maggiorazioni $|k| \le \sqrt{h^2+k^2}$ e $|h| \le \sqrt{h^2+k^2}$ per ottenere

$$\left|\frac{h|k| + h^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \le h + |h|\,.$$

La funzione f è quindi differenziabile in $(0,1)$.

Per quanto riguarda la ricerca di massimi e minimi locali in A la risoluzione completa è lasciata per esercizio, ne dò solo un accenno. L'insieme A ha come bordo un quadrato di vertici

$$(0,0)\,, \quad (1,1)\,, \quad (0,2)\,, \quad (-1,1)\,.$$

Lo studio sul bordo si può fare per sostituzione scrivendo le equazioni delle rette ed è omesso. Per lo studio dell'esistenza di massimi e minimi interni è opportuno studiare separatamente i casi $y > 1$ e $y < 1$ come fatto nell'esercizio precedente: lo studio di gradiente e matrice hessiana porterà a trovare dei punti di sella in $(0, \frac{3}{2})$ e $(0, \frac{1}{2})$. Lungo la retta $y = 1$ si può trovare un minimo locale in $(\frac{1}{4}, 1)$. Infatti lungo tale retta dobbiamo studiare la funzione

$$f(x,1) = g(x) = x^2 - \tfrac{1}{2}x$$

che presenta un minimo locale in $x = \frac{1}{4}$. In un intorno del punto $(\frac{1}{4}, 1)$ notiamo che

$$f(x,y) = x|y-1| + x^2 - \tfrac{1}{2}x \geq x^2 - \tfrac{1}{2}x = f(x,1)\,.$$

Anche qui, come nell'esercizio precedente, notiamo che *staccandoci dalla retta* $y = 1$ *il grafico di* f *sale.*

Concludo con questa osservazione: si poteva introdurre il cambio di variabile $Y = y - 1$ che avrebbe portato allo studio della funzione $\tilde{f}(x,Y) = x|Y| + x^2 - \frac{1}{2}x$ sull'insieme $\tilde{A} = \{(x,Y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| \leq 1-Y\,,\ |x| \leq Y+1\}$ simmetrico rispetto all'asse delle x. La funzione $\tilde{f}$ risulta pari rispetto alla variabile Y. Naturalmente anche la funzione f presenta una simmetria rispetto alla retta $y = 1$.

Esercizio 2.20. *Spazio per l'esercizio di gennaio*

Esercizio 2.21. *Spazio per l'esercizio di febbraio*

3 Integrazione

3.1 A.A. 2018/2019

Esercizio 3.1. *Calcolare l'integrale* $\iiint_V y\,dxdydz$ *dove*

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq z \leq 2x\,,\ y \geq x\}\,.$$

Possiamo descrivere l'insieme V nel seguente modo, intuendo la possibilità di integrare per fili:

$$\begin{aligned} V =& \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in U\,,\ x^2 + y^2 \leq z \leq 2x\}\,, \\ U =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 2x\,,\ y \geq x\}\,. \end{aligned}$$

Quindi avremo

$$\begin{aligned} I = \iiint_V y\,dxdydz &= \iint_U \left(\int_{x^2+y^2}^{2x} y\,dz \right) dxdy \\ &= \iint_U y(2x - x^2 - y^2)\,dxdy\,. \end{aligned}$$

L'insieme U può essere visualizzato in coordinate polari come

$$U_{pol} = \{(\rho,\theta) \mid \theta \in [\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{2}]\,,\ \rho \in [0, 2\cos\theta]\}\,.$$

Otteniamo quindi

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} \rho\, \rho \sin\theta (2\rho\cos\theta - \rho^2)\, d\rho \right) d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \left(\int_0^{2\cos\theta} 2\rho^3 \cos\theta - \rho^4\, d\rho \right) d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \left[2\,\frac{\rho^4}{4} \cos\theta - \frac{\rho^5}{5} \right]_0^{2\cos\theta} d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \left[8\cos^5\theta - \frac{32}{5}\cos^5\theta \right] d\theta \\
&= \frac{8}{5} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos^5\theta\, d\theta = \frac{8}{5} \left[-\frac{1}{6}\cos^6\theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{5}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{8} = \frac{1}{30}\,.
\end{aligned}
$$

Esercizio 3.2. *Calcolare l'integrale* $\iiint_E \frac{z}{xy}\, dxdydz$ *dove*

$$
E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y \le x \le z^2 \le 4y\,,\; x^2 \le y \le 2x^2\,,\; z \ge 0 \right\}.
$$

Possiamo descrivere l'insieme E nel seguente modo, intuendo la possibilità di integrare per fili:

$$
\begin{aligned}
E &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in F\,,\; \sqrt{x} \le z \le 2\sqrt{y} \}\,, \\
F &= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \le x \le 4y\,,\; x^2 \le y \le 2x^2 \}\,.
\end{aligned}
$$

Quindi avremo

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_E \frac{z}{xy}\, dxdydz = \iint_F \frac{1}{xy} \left(\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{y}} z\, dz \right) dxdy \\
&= \iint_F \frac{1}{xy} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{y}} dxdy = \frac{1}{2} \iint_F \frac{4y - x}{xy}\, dxdy\,.
\end{aligned}
$$

A questo punto notiamo che, introducendo le variabili

$$
m = y/x\,, \quad a = y/x^2
$$

possiamo riscrivere l'insieme $F \setminus \{(0,0)\}$ nel seguente modo qualora adottassimo tale *cambio di variabili*:

$$
\widetilde{F} = \{ (m,a) \mid m \in [\tfrac{1}{4}, 1]\,,\; a \in [1,2] \}\,.
$$

Cerchiamo il diffeomorfismo inverso $\Phi(m,a) = (x,y)$:

$$
\begin{cases}
x = \dfrac{x^2}{y}\,\dfrac{y}{x} = \dfrac{m}{a} \\[2mm]
y = \dfrac{y^2}{x^2}\,\dfrac{x^2}{y} = \dfrac{m^2}{a}
\end{cases}
$$

di cui calcoliamo lo Jacobiano e il valore assoluto del determinante:

$$
J_\Phi(m,a) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a} & -\dfrac{m}{a^2} \\[2mm] \dfrac{2m}{a} & -\dfrac{m^2}{a^2} \end{pmatrix}, \qquad |\det J_\Phi(m,a)| = 3\frac{m^2}{a^3}\,.
$$

Quindi, con il cambio di variabili otteniamo

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\iint_{[\frac{1}{4},1]\times[1,2]} \frac{4\frac{m^2}{a}-\frac{m}{a}}{\frac{m^3}{a^2}}\, 3\,\frac{m^2}{a^3}\, dmda \\
&= \frac{3}{2}\int_{\frac{1}{4}}^{1}(4m-1)\,dm\int_{1}^{2}a^{-2}\,da = \frac{3}{2}\left[2m^2-m\right]_{\frac{1}{4}}^{1}\left[a^{-1}\right]_{1}^{2} = \frac{3}{2}\,\frac{9}{8}\,\frac{1}{2} = \frac{27}{32}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 3.3. *Calcolare il baricentro del corpo C, avente densità costante $\rho = 2$, che si ottiene ruotando l'insieme*

$$F = \left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 0\le y\le z\,,\, y^2+z^2\le 2y\right\}$$

di un angolo di 2π attorno all'asse y.

Scambiando le coordinate y e z possiamo riformulare l'esercizio come *Calcolare il baricentro del corpo C, avente densità costante $\rho = 2$, che si ottiene ruotando l'insieme*

$$\widetilde{F} = \left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 0\le z\le y\,,\, y^2+z^2\le 2z\right\}$$

di un angolo di 2π attorno all'asse z.

L'insieme C può essere scritto in coordinate cilindriche come

$$C_{cil} = \left\{(r,\theta,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, \theta\in[0,2\pi]\,,\,(r,z)\in\widetilde{F}\right\},$$

quindi avremo

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_C dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \iint_{\widetilde{F}} r\,drdz = 2\pi\iint_{\widetilde{F}} r\,drdz\,,\\
M_z &= \iiint_C z\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \iint_{\widetilde{F}} rz\,drdy = 2\pi\iint_{\widetilde{F}} rz\,drdz\,.
\end{aligned}$$

Il baricentro sarà il punto $\widetilde{G} = (0,0,z_G)$ dove $z_G = M_z/M$, dove le prime coordinate saranno nulle data la simmetria cilindrica dell'insieme.

Secondo il testo originale invece sarà $G = (0,z_G,0)$, ricordando che inizialmente avevamo scambiato le variabili y e z.

L'insieme $\widetilde{F}$ può essere visto in coordinate polari

$$\widetilde{F}_{pol} = \left\{(\rho,\theta)\mid \theta\in[0,\tfrac{\pi}{4}]\,,\,\rho\in[0,2\sin\theta]\right\}\,.$$

Possiamo quindi calcolare

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{2\sin\theta} d\rho\,\rho\,\rho\cos\theta\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{2\sin\theta}\cos\theta d\theta \\
&= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\theta\cos\theta d\theta = \frac{2}{3}\left[\sin^4(\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{6}\,,
\end{aligned}$$

Il secondo integrale risulta

$$\begin{aligned}
M_z &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{2\cos\theta} d\rho\,\rho\,\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta\right)d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos\theta\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{2\sin\theta} d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^5\theta\cos\theta\,d\theta \\
&= \frac{2}{3}\left[\sin^6\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{8} = \frac{1}{12}\,.
\end{aligned}$$

Quindi concludiamo che

$$z_G = \frac{M_z}{M} = \frac{1}{12} \cdot 6 = \frac{1}{2}\,.$$

Esercizio 3.4. *Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'azze z del solido, avente densità costante $\rho = 1$, definito come segue*

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le x \le z\,, 0 \le y \le 1 - z\right\}.$$

L'integrale può essere risolto per fili osservando che

$$\begin{aligned} F &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x, z) \in E\,,\, 0 \le y \le 1 - z\right\}, \\ E &= \left\{(x, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le x \le z \le 1\right\} \end{aligned}$$

(sono possibili altre risoluzioni per fili, questa non è l'unica scelta).

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_F x^2 + y^2 \, dxdydz \\ &= \iint_E \left(\int_0^{1-z} x^2 + y^2 \, dy\right) dxdz \\ &= \iint_E \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{1-z} dxdz = \iint_E x^2(1 - z) + \frac{1}{3}(1 - z)^3 \, dxdz \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}(1 - z) + \frac{1}{3}(1 - z)^3 x\right]_0^z dz \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 z^3(1 - z) + (1 - z)^3 z \, dz\,. \end{aligned}$$

Notiamo, effettuando la sostituzione $s = 1 - z$ che

$$\int_0^1 z^3(1 - z)\, dz = \int_0^1 (1 - s)^3 s \, ds\,,$$

ottenendo quindi

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{2}{3} \int_0^1 z^3(1 - z)\, dz = \frac{2}{3} \int_0^1 z^3 - z^4 \, dz \\ &= \frac{2}{3}\left[\frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\frac{1}{20} = \frac{1}{30}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 3.5. *Calcolare*

$$\int_F \mathrm{e}^z \, dxdydz$$

dove

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 \le x^2 + y^2 \le 1 - z^2\,,\, -\sqrt{3}\, y \le x \le y\right\}.$$

Possiamo scrivere in coordinate sferiche (θ, φ, ρ) l'insieme F come

$$F_{sf} = \left[\tfrac{1}{4}\pi, \tfrac{5}{6}\pi\right] \times \left[\tfrac{1}{4}\pi, \tfrac{3}{4}\pi\right] \times [0, 1]\,,$$

ottenendo quindi

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_F \mathrm{e}^z \, dxdydz \\
&= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} d\theta \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \, \rho^2 \sin\varphi \, \mathrm{e}^{\rho\cos\varphi} \\
&= \pi\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{4}\right) \int_0^1 \rho \, [-\mathrm{e}^{\rho\cos\varphi}]_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \, d\rho \\
&= \frac{7}{12}\pi \int_0^1 \rho \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\rho} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\rho}\right) d\rho \\
&= \frac{7}{6}\pi \int_0^1 \rho \, \sinh(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\rho) \, d\rho
\end{aligned}
$$

che possiamo integrare per parti ottenendo

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{7}{6}\pi\left(\left[\rho\sqrt{2}\cosh(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\rho)\right]_0^1 - \sqrt{2}\int_0^1 \cosh(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\rho) d\rho\right) \\
&= \frac{7}{6}\pi\left[\rho\sqrt{2}\cosh(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\rho) - 2\sinh(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\rho)\right]_0^1 \\
&= \frac{7}{6}\pi\left[\sqrt{2}\cosh(\tfrac{1}{\sqrt{2}}) - 2\sinh(\tfrac{1}{\sqrt{2}})\right].
\end{aligned}
$$

Esercizio 3.6. *Calcolare*

$$\int_F \frac{x^2+y^2}{z^2} \, dxdydz$$

dove

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z \le x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \le 5z \,,\ 3z \le x^2 + y^2 \le 4z\right\}.$$

Possiamo vedere l'insieme F in coordinate cilindriche come

$$
\begin{aligned}
F_{cil} &= \left\{(r,\theta,z) \mid (r,z) \in E \,,\ \theta \in [0,2\pi]\right\}, \\
E &= \left\{(r,z) \in | 2z \le r^4 \le 5z \,,\ 3z \le r^2 \le 4z\right\},
\end{aligned}
$$

così da ottenere

$$
\begin{aligned}
I = \iiint_F \frac{x^2+y^2}{z^2} \, dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\theta \iint_E r \, \frac{r^2}{z^2} \, drdz \\
&= 2\pi \iint_E r \, \frac{r^2}{z^2} \, drdz \,.
\end{aligned}
$$

Mediante il cambio di variabili

$$a = \rho^4/z \,, \qquad b = \rho^2/z \,,$$

possiamo vedere l'insieme E nelle nuove variabili come

$$\widetilde{E} = \{(a,b) \mid 2 \le a \le 5 \,,\ 3 \le b \le 4\}.$$

Calcoliamo il diffeomorfismo inverso

$$
\begin{cases}
z = \frac{r^4}{z}\frac{z^2}{r^4} = \frac{a}{b^2} \\
r^2 = \frac{r^4}{z}\frac{z}{r^2} = \frac{a}{b}
\end{cases}
\quad\Rightarrow\quad (z,r) = \Phi(a,b) = \left(ab^{-2} \,,\ a^{1/2}b^{-1/2}\right),
$$

la matrice jacobiana e il suo determinante

$$J_\Phi(a,b) = \begin{pmatrix} b^{-2} & -2ab^{-3} \\ \frac{1}{2}a^{-1/2}b^{-1/2} & -\frac{1}{2}a^{1/2}b^{-3/2} \end{pmatrix}, \quad |\det J_\Phi(a,b)| = \frac{1}{2}a^{1/2}b^{-7/2}\,.$$

Quindi otteniamo

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \int_2^5 da \int_3^4 db \frac{a^{3/2}b^{-3/2}}{a^2b^{-4}}\,\frac{1}{2}a^{1/2}b^{-7/2} \\ &= \pi \int_2^5 da \int_3^4 b^{-1}\,db = 3\pi\,\ln\tfrac{4}{3}\,. \end{aligned}$$

3.2 A.A. 2019/2020

Esercizio 3.7. *Determinare il baricentro del corpo a densità costante $\mu = 2$ che occupa la porzione di spazio*

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \le \sqrt{x^2+y^2+z^2} - z\right\}.$$

Il risultato non cambia se prendiamo $\mu = 1$. Usando coordinate sferiche l'equazione che descrive l'insieme C diventa $\rho^2 \le \rho(1-\cos\varphi)$, quindi $0 \le \rho \le 1-\cos\varphi$. Le coordinate angolari non hanno restrizioni: $\theta \in [0,2\pi]$ e $\varphi \in [0,\pi]$. La simmetria cilindrica dell'insieme ci suggerisce le prime due coordinate del baricentro: $G = (0,0,z_G)$ con

$$z_G = \frac{\iiint_C z\,dxdydz}{\iiint_C dxdydz}\,.$$

Calcoliamo i due integrali:

$$\begin{aligned} \iiint_C dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^{1-\cos\varphi} \rho^2 \sin\varphi \\ &= 2\pi \int_0^\pi d\varphi \sin\varphi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{1-\cos\varphi} \\ &= \frac{2}{3}\pi \int_0^\pi (1-\cos\varphi)^3 \sin\varphi\,d\varphi \\ &= \frac{2}{3}\pi \left[\frac{1}{4}(1-\cos\varphi)^4\right]_0^\pi = \frac{1}{6}\pi\,2^4 = \frac{8}{3}\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_C z\,dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^{1-\cos\varphi} \rho^3 \sin\varphi\cos\varphi \\ &= 2\pi \int_0^\pi d\varphi \sin\varphi\cos\varphi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{1-\cos\varphi} \\ &= \frac{1}{2}\pi \int_0^\pi d\varphi \sin\varphi\cos\varphi(1-\cos\varphi)^4 \qquad (s = 1-\cos\varphi) \\ &= \frac{1}{2}\pi \int_0^2 (1-s)s^4\,ds = \frac{1}{2}\pi\left[\tfrac{1}{5}s^5 - \tfrac{1}{6}s^6\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2}\pi\left[\tfrac{1}{5}2^5 - \tfrac{1}{6}2^6\right] = -\frac{32}{15}\pi\,. \end{aligned}$$

Quindi troviamo

$$z_G = -\frac{32\pi}{15}\,\frac{3}{8\pi} = -\frac{4}{5}\,.$$

Esercizio 3.8. *Calcolare* $\iint_E \frac{\sin(2x)}{y^2}\, dxdy$ *dove*

$$E = \Big\{(x,y) \in [0,\pi/2]\times\mathbb{R} \,:\, y \le \sin x \le 2y\,;\; y \le \cos x \le 3y\Big\}\,.$$

L'integrale si risolve impostando il cambio di variabili

$$\begin{cases} A = \frac{\sin x}{y} \\ B = \frac{\cos x}{y} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \frac{A}{B} = \tan x \\ 1 = \cos^2 x + \sin^2 x = (Ay)^2 + (By)^2 \end{cases}$$

da cui troviamo

$$\begin{cases} x = \arctan \frac{A}{B} \\ y = (A^2+B^2)^{-1/2} \end{cases}$$

che ha matrice jacobiana

$$\begin{aligned} J_\Phi(A,B) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\frac{A^2}{B^2}}\cdot\frac{1}{B} & \frac{1}{1+\frac{A^2}{B^2}}\cdot\frac{-A}{B^2} \\ (A^2+B^2)^{-1/2}\cdot(-A) & (A^2+B^2)^{-1/2}\cdot(-B) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (A^2+B^2)^{-1}B & (A^2+B^2)^{-1}(-A) \\ (A^2+B^2)^{-3/2}(-A) & (A^2+B^2)^{-3/2}(-B) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

tale che

$$|\det J_\Phi(A,B)| = (A^2+B^2)^{-3/2}\,.$$

In alternativa possiamo calcolare

$$J_{\Phi^{-1}}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\cos x}{y} & -\frac{\sin x}{y^2} \\ -\frac{\sin x}{y} & -\frac{\cos x}{y^2} \end{pmatrix} \qquad |\det J_{\Phi^{-1}}(x,y)| = y^{-3} = (A^2+B^2)^{-3/2}$$

dove per il passaggio finale dobbiamo comunque riuscire ad esprimere y rispetto ad A e B.

Quindi l'integrale richiesto si calcola nel modo seguente:

$$\begin{aligned} I &= \iint_E \frac{\sin(2x)}{y^2}\, dxdy = \iint_E 2\frac{\sin x}{y}\frac{\cos x}{y}\, dxdy \\ &= \int_1^2 dA \int_1^3 dB\, 2AB(A^2+B^2)^{-3/2} \\ &= \int_1^2 dA\, A\left[(A^2+B^2)^{-1/2}(-2)\right]_1^3 \\ &= -\int_1^2 2A\left[(A^2+9)^{-1/2} - (A^2+1)^{-1/2}\right] dA \\ &= -2\left[(A^2+9)^{1/2} - (A^2+1)^{1/2}\right]_1^2 \\ &= -2\left[\sqrt{13}-\sqrt{5}-\sqrt{10}+\sqrt{2}\right] = 2\left[\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{13}\right] \end{aligned}$$

Verificare per esercizio che l'argomento della parentesi quadra è positivo.

Esercizio 3.9. *Calcola il momento d'inerzia rispetto all'asse z del corpo di densità di massa $\mu(x,y,z) = x^{-3}$ che occupa la regione di spazio*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le y \le z \le x \le x^2+y^2 \le 1\}\,.$$

L'insieme E può essere riscritto come

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \widetilde{E}\,,\, \le y \le z \le x\}$$
$$\widetilde{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le x \le x^2 + y^2 \le 1\}\,.$$

Tale possibilità ci suggerisce di integrare per fili

$$\begin{aligned} I = \iiint_E \frac{x^2+y^2}{x^3}\, dxdydz &= \iint_{\widetilde{E}} \left(\int_y^x \frac{x^2+y^2}{x^3}\, dz \right) dxdy \\ &= \iint_{\widetilde{E}} \frac{x^2+y^2}{x^3} \left(\int_y^x dz \right) dxdy \\ &= \iint_{\widetilde{E}} \frac{x^2+y^2}{x^3} (x-y)\, dxdy \end{aligned}$$

L'insieme $\widetilde{E}$ può essere visto in coordinate polari come

$$\widetilde{E}_{pol} = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \cos\theta \le \rho \le 1\,,\, \theta \in [0, \tfrac{\pi}{4}]\}\,.$$

Quindi l'integrale sarà

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\cos\theta}^1 \rho\, d\rho \right) \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos^3\theta}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\rho^2\right]_{\cos\theta}^1 \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos^3\theta}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos\theta - \sin\theta)(1-\cos^2\theta)}{\cos^3\theta}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 - \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\tan\theta - \theta - \frac{(\cos\theta)^{-2}}{2} - \ln|\cos\theta| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{2}\ln 2 - 0 + 0 + \frac{1}{2} - 0 \right] \\ &= \frac{1}{8}(2\ln 2 + 2 - \pi)\,. \end{aligned}$$

Esercizio 3.10. *Calcolare il baricentro del seguente corpo planare di densità costante*

$$F = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sqrt[3]{x^2} - 1 \le y \le \frac{1-|x|}{2} \right\}\,.$$

Disegna F.

Data la simmetria dell'insieme avremo che il baricentro sarà $G = (0, y_G)$ con $y_G = \mathcal{I}_y/\mathcal{I}$ che, sempre usando la simmetria dell'insieme, possono essere calcolati su $F^+ = \{(x,y) \in F \,:\, x \ge 0\}$:

$$\mathcal{I}_y = \iint_{F^+} y\, dxdy\,, \qquad \mathcal{I} = \iint_{F^+} dxdy\,.$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_y &= \iint_{F^+} y\,dxdy \\
&= \int_0^1 \left(\int_{x^{\frac{2}{3}}-1}^{\frac{1-x}{2}} y\,dy \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{4} \left(\frac{1-x}{2} \right)^2 - \left(x^{\frac{2}{3}} - 1 \right)^2 dx \\
&= \frac{1}{8} \left[x + \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^1 - \frac{1}{2} \left[\frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} + x - \frac{6}{5} x^{\frac{5}{3}} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{12} - \frac{3}{7} - \frac{1}{5} \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \iint_{F^+} dxdy \\
&= \int_0^1 \left(\int_{x^{\frac{2}{3}}-1}^{\frac{1-x}{2}} dy \right) dx \\
& \int_0^1 \left(\frac{1-x}{2} \right) - \left(x^{\frac{2}{3}} - 1 \right) dx \\
&= \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} x^2 - \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + x \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{5}{2} - \frac{6}{5} \right]
\end{aligned}
$$

Quindi otteniamo

$$y_G = \frac{\frac{1}{12} - \frac{3}{7} - \frac{1}{5}}{\frac{5}{2} - \frac{6}{5}}$$

(poiché in sede d'esame non è permesso l'uso della calcolatrice, la risposta può essere data in questa forma).

Esercizio 3.11. *Calcola* $\iiint_E z\,dxdydz$ *dove*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 + 3z^2 \le 9\,, z \ge y\}\,.$$

Mediante il cambio di variabile

$$\Phi : \begin{cases} x = a/2 \\ y = b \\ z = c/\sqrt{3} \end{cases} \qquad |\det J_\Phi| = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

possiamo trasformare l'integrale su F nell'integrale

$$\mathcal{I} = \iiint_E z\,dxdydz = \iiint_E \frac{c}{\sqrt{3}} \frac{1}{2\sqrt{3}}\,dadbdc = \frac{1}{6} \iiint_E c\,dadbdc$$

dove

$$E = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a^2 + b^2 + c^2 \le 9\,,\, c \ge b\sqrt{3}\}\,.$$

A questo punto è conveniente il seguente riordinamento delle variabili $(a, b, c) = (Z, X, Y)$:

$$\mathcal{I} = \frac{1}{6} \iiint_E Y\,dXdYdZ$$

dove

$$E = \{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, X^2 + Y^2 + Z^2 \le 9\,,\, Y \ge X\sqrt{3}\}\,.$$

Passando in coordinate sferiche abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \frac{1}{6}\int_{\pi/3}^{4\pi/3} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^3 d\rho\ \rho^2 \sin\varphi\ \rho \sin\varphi \sin\theta \\
&= \frac{1}{6}\int_{\pi/3}^{4\pi/3} \sin\theta\, d\theta \int_0^{\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi \int_0^3 \rho^3\, d\rho \\
&= \frac{1}{6}\left[-\cos\theta\right]_{\pi/3}^{4\pi/3} \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^3 \\
&= \frac{1}{6}\cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2}\cdot\frac{3^4}{4} = \frac{27}{16}\pi\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 3.12. *Data una sfera di raggio R e centro $O = (0,0,0)$, di densità $\mu(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1}$, calcolarne il momento di inerzia rispetto ad una retta passante per il suo centro. Esprimere il risultato in funzione di massa e raggio.*

Calcoliamo il momento di inerzia in coordinate sferiche

$$\begin{aligned}
I_z &= \iiint_{B_R(0)} \mu(x,y,z)x^2 + y^2\, dxdydz \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R d\rho\ \rho^2 \sin\varphi\ \frac{1}{\rho^2}\ \rho^2 \sin^2\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin^3\varphi\, d\varphi \int_0^R \rho^2\, d\rho \\
&= 2\pi \cdot \frac{4}{3}\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{8\pi R^3}{9}
\end{aligned}$$

dove abbiamo calcolato

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin^3\varphi\, d\varphi &= \int_0^{\pi} \sin\varphi(1-\cos^2\varphi)\, d\varphi \\
&= \left[-\cos\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^{\pi} = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\,.
\end{aligned}$$

Quindi dobbiamo calcolare la massa della sfera

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_{B_R(0)} \mu(x,y,z)\, dxdydz \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R d\rho\ \rho^2 \sin\varphi\ \frac{1}{\rho^2} \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^R d\rho \\
&= 2\pi \cdot 2 \cdot R = 4\pi R\,.
\end{aligned}$$

Quindi concludiamo che

$$I_z = \frac{8\pi R^3}{9} = \frac{2}{9}MR^2\,.$$

Esercizio 3.13. *Calcola il baricentro della semisfera di raggio R centrata in $O = (0,0,0)$ e contenuta nel semispazio $z \ge 0$ (* emisfero nord *) di densità $\mu(x,y,z) = z^2$.*

Il baricentro sarà $G = (0, 0, z_G)$ in ragione delle simmetrie della semisfera S (e della simmetria della funzione densità!). Calcoleremo quindi $z_G = \mathcal{I}_z/\mathcal{I}$ introducendo le coordinate sferiche.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_z &= \iiint_S \mu(x,y,z) z \, dxdydz \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R d\rho \; \rho^2 \sin\varphi \; \rho^3 \cos^3\varphi \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos^3\varphi \int_0^R \rho^5 \, d\rho \\
&= 2\pi \left[-\frac{1}{4} \cos^4\varphi \right]_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{6} \rho^6 \right]_0^R \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} R^6 = \frac{\pi}{12} R^6 \, .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \iiint_S \mu(x,y,z) \, dxdydz \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R d\rho \; \rho^2 \sin\varphi \; \rho^2 \cos^2\varphi \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos^2\varphi \int_0^R \rho^4 \, d\rho \\
&= 2\pi \left[-\frac{1}{3} \cos^3\varphi \right]_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{5} \rho^5 \right]_0^R \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} R^5 = \frac{2\pi}{15} R^5 \, .
\end{aligned}$$

Concludiamo che

$$z_G = \frac{\frac{\pi}{12} R^6}{\frac{2\pi}{15} R^5} = \frac{5}{8} R \, .$$

Esercizio 3.14. *Determina, applicando il teorema del cambio di variabile, il valore del seguente integrale:*

$$\iint_E \frac{\mathrm{e}^x}{y} \, dxdy \, ,$$

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \mathrm{e}^{2x} \le y \le 2\mathrm{e}^x \, , \, \mathrm{e}^x \le y \le 2\mathrm{e}^{2x} \} \, .$$

Possiamo riscrivere l'insieme E nel modo seguente:

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \mathrm{e}^{2x} \le y \le 2\mathrm{e}^{2x} \, , \, \mathrm{e}^x \le y \le 2\mathrm{e}^x \} \, .$$

Dalle disequazione possiamo ottenere

$$1 \le y\mathrm{e}^{-2x} \le 2 \, , \qquad 1 \le y\mathrm{e}^{-x} \le 2 \, .$$

Scegliendo il cambio di variabile

$$u = y\mathrm{e}^{-2x} \, , \qquad v = y\mathrm{e}^{-x} \, ,$$

potremmo riscrivere l'insieme E nel modo seguente

$$\widetilde{E} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \, : \, u \in [1,2] \, , v \in [1,2] \} \, .$$

Isolando x e y otteniamo (dettagli per esercizio)

$$x = \ln \frac{v}{u} = \ln v - \ln u \,, \qquad y = \frac{v^2}{u} \,,$$

con associata la matrice Jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{u} & \dfrac{1}{v} \\ \\ -\dfrac{v^2}{u^2} & 2\dfrac{v}{u} \end{pmatrix} ,$$

con $|\det J| = \dfrac{v}{u^2}$. Siamo pronti per la sostituzione nell'integrale

$$\iint_E \frac{\mathrm{e}^x}{y}\, dxdy = \int_1^2 \left(\int_1^2 \frac{v}{u^2}\, \frac{v}{u}\, \frac{u}{v^2}\, du \right) dv = \left(\int_1^2 \frac{1}{u^2}\, du \right) \left(\int_1^2 1\, dv \right) = \frac{1}{2} \,.$$

Esercizio 3.15. *Calcolare il baricentro del corpo di densità costante che occupa la seguente prozione di spazio*

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4\} \,.$$

Essendo il corpo a densità costante, possiamo scrivere le formule per il calcolo delle coordinate del baricentro (ovvero del centroide) nel modo seguente. Denotiamo con $x_G(F)$ la coordinata x del baricentro (o centroide) e con $|F|$ la misura di F. Otteniamo

$$x_G(F) = \frac{1}{|F|} \iiint_F x\, dxdydz \qquad \Rightarrow \qquad x_G(F) \cdot |F| = \iiint_F x\, dxdydz \,.$$

Nel nostro caso l'insieme E si può scrivere come $E = B_2(0,0,0) \setminus B_1(1,0,0)$ dove abbiamo denotato con $B_r(x,y,z)$ la palla di raggio r centrata in (x,y,z). Poiché $B_1(1,0,0) \subset B_2(0,0,0)$ abbiamo

$$\begin{aligned} x_G(E) \cdot |E| &= \iiint_E x\, dxdydz \\ &= \iiint_{B_2(0,0,0)} x\, dxdydz - \iiint_{B_1(1,0,0)} x\, dxdydz \\ &= x_G(B_2(0,0,0)) \cdot |B_2(0,0,0)| - x_G(B_1(1,0,0)) \cdot |B_1(1,0,0)| \end{aligned}$$

A questo punto sappiamo che il baricentro (o centroide) della palla $B_r(x,y,z)$ ha coordinate (x,y,z), mentre la misura è il noto $\frac{4}{3}\pi r^3$. Quindi otteniamo

$$x_G(E) \cdot \frac{4}{3}\pi (2^3 - 1^2) = 0 \cdot \frac{4}{3}\pi 2^3 - 1 \cdot \frac{4}{3}\pi 1^3 \quad \Rightarrow \quad x_G(E) = -\frac{1}{7} \,.$$

Anche senza accorgerci della simmetria dell'insieme E, possiamo ricavare $y_G(E) = z_G(E) = 0$. Quindi il baricentro risulta

$$G = \left(-\frac{1}{7}, 0, 0 \right) \,.$$

In alternativa possiamo scrivere

$$
\begin{aligned}
x_G(E) &= \frac{\iiint_E x\,dxdydz}{\iiint_E 1\,dxdydz} \\
&= \frac{\iiint_{B_2(0,0,0)} x\,dxdydz - \iiint_{B_1(1,0,0)} x\,dxdydz}{\iiint_{B_2(0,0,0)} 1\,dxdydz - \iiint_{B_1(1,0,0)} 1\,dxdydz} \\
&= \frac{\iiint_{B_2(0,0,0)} x\,dxdydz - \iiint_{B_1(1,0,0)} x\,dxdydz}{\frac{4}{3}\pi 2^3 - \frac{4}{3}\pi 1^3}
\end{aligned}
$$

Nel secondo integrale possiamo introdurre un cambio di variabile $(x,y,z) = (X+1,y,z)$ e ottenere

$$
\begin{aligned}
x_G(E) &= \frac{\iiint_{B_2(0,0,0)} x\,dxdydz - \iiint_{B_1(0,0,0)} (X+1)\,dXdydz}{7\,\frac{4}{3}\pi} \\
&= \frac{\iiint_{B_2(0,0,0)} x\,dxdydz - \iiint_{B_1(0,0,0)} X\,dXdydz - \iiint_{B_1(0,0,0)} 1\,dXdydz}{7\,\frac{4}{3}\pi}\,.
\end{aligned}
$$

I primi due integrali danno zero come risultato (dettagli per esercizio), mentre il terzo restituisce la misura della palla unitaria, ovvero $\frac{4}{3}\pi$.

3.3 A.A. 2020/2021

Esercizio 3.16. *Calcolare* $\displaystyle\iiint_E (x-1)\,dxdydz$, *dove*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \le 1\,,\, 0 \le z \le y \le 1-x\}\,.$$

Osserviamo che $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in F\,,\, 0 \le z \le y\}$ dove

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 1\,,\, 0 \le y \le 1-x\}\,.$$

L'insieme F è costituito da un quarto di cerchio nel secondo quadrante e un triangolo nel primo quadrante: $F = F_1 \cup F_2$ dove

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 1\,,\, x \le 0\,, y \ge 0\}\,, \\
F_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \ge 0\,, y \le 1-x\}\,.
\end{aligned}
$$

Quindi

$$\iiint_E (x-1)\,dxdydz = \iint_F \left(\int_0^y (x-1)dz\right) dxdy = \iint_F (x-1)y\,dxdy$$

$$\iint_F (x-1)y\,dxdy = \iint_{F_1} (x-1)y\,dxdy + \iint_{F_2} (x-1)y\,dxdy\,.$$

In particolare

$$
\begin{aligned}
\iint_{F_1} (x-1)y\,dxdy &= \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\int_0^1 \rho(\rho\cos\theta - 1)\rho\sin\theta\,d\rho\right) d\theta \\
&= \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\int_0^1 \frac{1}{2}\rho^3\sin(2\theta) - \rho^2\sin\theta\,d\rho\right) d\theta = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{8}\sin(2\theta) - \frac{1}{3}\sin\theta\,d\theta \\
&= \left[-\frac{\cos(2\theta)}{16} + \frac{\cos\theta}{3}\right]_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{1}{16} - \frac{1}{3} - \frac{1}{16} + 0 = -\frac{11}{24}\,,
\end{aligned}
$$

$$\iint_{F_2} (x-1)y\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x-1)y\,dy \right) dx = \int_0^1 (x-1)\frac{(1-x)^2}{2} dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2}(x-1)^3\,dx = \left[\frac{1}{8}(x-1)^4 \right]_0^1 = -\frac{1}{8}\,.$$

Otteniamo quindi

$$\iiint_E (x-1)\,dxdydz = -\frac{11}{24} - \frac{1}{8} = -\frac{7}{12}\,.$$

Per esercizio risolvere l'integrale su F vedendo l'insieme come dominio normale

$$F = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq 1-y\,,\ y \in [0,1] \right\}\,.$$

Esercizio 3.17. *Calcolare il baricentro del corpo a densità costante che occupa la porzione di spazio*

$$E = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 3x^2 \leq y^2 + z^2 \leq 3 - x^2\,,\ yz \leq 0\,,\ z \geq |y| \}\,.$$

Possiamo riscrivere, *cambiando i nomi alle variabili*, l'insieme come

$$E = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 3z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 3 - z^2\,,\ xy \leq 0\,,\ y \geq |x| \}\,.$$

Inoltre possiamo scrivere

$$E = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in F\,,\ 3z^2 \leq x^2 + y^2\,,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 3 \}\,.$$

dove

$$F = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xy \leq 0\,,\ y \geq |x| \}\,.$$

Notando la simmetria nella z concludiamo subito che avremo un baricentro $G = (x_G, y_G, z_G) = (x_G, y_G, 0)$. Le condizioni che descrivono E ci danno le seguenti limitazioni in coordinate sferiche: $\rho \in [0, \sqrt{3}]$ e $\varphi \in [\pi/3, 2\pi/3]$. Le disequazioni che descrivono F ci danno $\theta \in [\pi/2, 3\pi/4]$. In coordinate sferiche, E è rappresentato da un rettangolo. Possiamo partire con i calcoli:

$$\iiint_E 1\,dxdydz = \int_0^{\sqrt{3}} d\rho \int_{\pi/3}^{2\pi/3} d\varphi \int_{\pi/2}^{3\pi/4} d\theta\ \rho^2 \sin\varphi$$
$$= \left(\int_0^{\sqrt{3}} \rho^2\,d\rho \right) \left(\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin\varphi\,d\varphi \right) \left(\int_{\pi/2}^{3\pi/4} 1\,d\theta \right) = \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\sqrt{3}$$

$$\iiint_E x\,dxdydz = \int_0^{\sqrt{3}} d\rho \int_{\pi/3}^{2\pi/3} d\varphi \int_{\pi/2}^{3\pi/4} d\theta\ \rho^2 \sin\varphi \cdot \rho \sin\varphi \cos\theta$$
$$= \left(\int_0^{\sqrt{3}} \rho^3\,d\rho \right) \left(\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin^2\varphi\,d\varphi \right) \left(\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \cos\theta\,d\theta \right)$$
$$= \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right)$$

$$
\begin{aligned}
\iiint_E y\,dxdydz &= \int_0^{\sqrt{3}} d\rho \int_{\pi/3}^{2\pi/3} d\varphi \int_{\pi/2}^{3\pi/4} d\theta\ \rho^2 \sin\varphi \cdot \rho \sin\varphi \sin\theta \\
&= \left(\int_0^{\sqrt{3}} \rho^3\,d\rho\right)\left(\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin^2\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sin\theta\,d\theta\right) \\
&= \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

Si noti che

$$
\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin^2\varphi\,d\varphi = \left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right]_{\pi/3}^{2\pi/3} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}\,.
$$

Concludiamo quindi che

$$
x_G = \frac{\frac{9}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)}{\frac{\pi}{4}\sqrt{3}}\,, \qquad y_G = \frac{\frac{9}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}\sqrt{3}}\,, \qquad z_G = 0\,.
$$

Non occorre moltiplicare le parentesi, la risposta va bene così oppure si può semplificare un po' la frazione.

Esercizio 3.18. *Calcolare il momento d'inerzia I_z rispetto all'asse z del corpo solido di densità costante δ che occupa la porzione di spazio*

$$
E = \{\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \|\boldsymbol{x}\|_\infty \le R\}\,.
$$

Dare la risposta in termini di massa M dell'oggetto e del valore R.

Ricordando che per ogni $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ abbiamo

$$
\|\boldsymbol{x}\|_\infty \le R \iff |x| \le R\,,\ |y| \le R\,,\ |z| \le R\,,
$$

abbiamo

$$
\begin{aligned}
I_z = \iiint_{[-R,R]^3} \delta(x^2 + y^2)\,dxdydz &= \delta \int_{-R}^{R} \left(\int_{-R}^{R} \left(\int_{-R}^{R} x^2 + y^2\,dz\right) dy\right) dx \\
&= 2R\delta \int_{-R}^{R} \left(\int_{-R}^{R} x^2 + y^2 dy\right) dx = 2R\delta \int_{-R}^{R} \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3\right]_{-R}^{R} dx \\
&= 4R\delta \int_{-R}^{R} Rx^2 + \frac{1}{3}R^3 dx = 4R\delta \left[\frac{1}{3}Rx^3 + \frac{1}{3}xR^3\right]_{-R}^{R} = 4R\delta \cdot \frac{4}{3}R^4 = \frac{16}{3}\delta R^5\,.
\end{aligned}
$$

La massa di un cubo di lato $2R$ e densità δ è $M = 8\delta R^3$, quindi abbiamo $I_z = \frac{2}{3}MR^2$.

Esercizio 3.19. *Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z del corpo solido di densità $\delta(x, y, z) = z$ che occupa la porzione di spazio*

$$
E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - z^2 \le 1 - 2z\,,\ |z - 2| \le 2\}.
$$

L'insieme E si può scrivere come

$$
E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \le (z - 1)^2\,,\ z \in [0, 4]\}.
$$

Quindi, usando le coordinate cilindriche

$$
\begin{aligned}
I_z &= \int_E z(x^2+y^2)\,dxdydz = \int_0^4 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{|z-1|} z\rho^3\,d\rho \right) dz \\
&= 2\pi \int_0^4 \left(\int_0^{|z-1|} \rho^3\,d\rho \right) z\,dz = 2\pi \int_0^4 \frac{1}{4} z(z-1)^4\,dz = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^3 s^5 + s^4\,ds \\
&\qquad\qquad \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{6}s^6 - \frac{1}{5}s^5\right]_{-1}^3 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{3^6-1}{6} + \frac{3^5+1}{5}\right).
\end{aligned}
$$

Esercizio 3.20. *Spazio per l'esercizio di gennaio*

Esercizio 3.21. *Spazio per l'esercizio di febbraio*

4 Equazioni differenziali

4.1 A.A. 2018/2019

Esercizio 4.1. *Risolvere il seguente problema di Cauchy e determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione del problema di Cauchy.*

$$
\begin{cases} y' = y\cos^3 x - (y\cos x)^3 \\ y(\pi/2) = -1/2 \end{cases}
$$

Questa equazione differenziale può essere risolta in diversi modi. Essa può essere scritta a variabili separabili

$$
y' = (y - y^3)\cos^3 x
$$

o essere vista come un'equazione di Bernoulli. Nel primo caso dovremo calcolare le seguenti primitive

$$
\int \frac{1}{y-y^3}\,dx = \int \frac{1}{y^3(y^{-2}-1)}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|y^{-2}+1| + c,
$$

$$
\int \cos^3 x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx = \sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x + c
$$

(la prima delle due primitive si può trovare anche mediante l'usuale scomposizione in fratti semplici). Troviamo quindi

$$
-\frac{1}{2}\ln|y^{-2}-1| = \sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x + c.
$$

Sostituendo i dati iniziali del problema di Cauchy troviamo

$$
-\frac{1}{2}\ln|4-1| = 1 + \frac{1}{3} + c \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\ln 3.
$$

Dai calcoli precedenti notiamo che, in un intorno dell'istante iniziale $x_0 = \pi/2$ la funzione y assumerà valori tali che l'argomento del valore assoluto assumerà valori positivi, quindi avremo

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\ln\left(y(x)^{-2}-1\right) &= \sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{4}{3} - \frac{1}{2}\ln 3 \\
\ln\left(y(x)^{-2}-1\right) &= -2\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{4}{3} - \frac{1}{2}\ln 3\right) \\
y(x)^{-2} &= 1 + \mathrm{e}^{-2\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\ln 3\right)} \\
y(x) &= -\left[1 + \mathrm{e}^{-2\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\ln 3\right)}\right]^{-1/2} ,
\end{aligned}
$$

dove nell'ultimo passaggio è importante ricordare il segno meno suggerito dal valore della y.

In alternativa possiamo risolvere l'equazione differenziale come un'equazione di Bernoulli

$$\frac{y'}{y^3} = \frac{1}{y^2}\cos^3 x - \cos^3 x \quad \Rightarrow \quad z' = -2z\cos^3 x + 2cos^3 x$$

dove abbiamo usato la sostituzione $z = y^{-2}$ (a questo punto si potrebbe notare che, anche in questo caso potremmo proseguire mediante separazione delle variabili, provare questa strada per esercizio). Risolviamo l'equazione lineare in z trovando le primitive

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \int -2\cos^3 x\, dx = -2\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x\right) , \\
B(x) &= \int \mathrm{e}^{-A(x)}\, 2\cos^3 x\, dx = \mathrm{e}^{-A(x)} = \mathrm{e}^{2\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin^3 x\right)} ,
\end{aligned}
$$

dove la seconda primitiva è un *integrale immediato* sapendo dal calcolo precedente chi sia la derivata di A. La soluzione sarà del tipo

$$z(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\left(\mathrm{e}^{-A(x)} + C\right) = 1 + C\mathrm{e}^{A(x)} = 1 + C\mathrm{e}^{-2\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin^3 x\right)} ,$$

con costante C da determinare tramite le condizioni iziali:

$$4 = 1 + C\mathrm{e}^{-2\,\frac{4}{3}} \quad \Rightarrow \quad C = 3\mathrm{e}^{8/3} .$$

Arriviamo quindi alla soluzione

$$z(x) = 1 + 3\mathrm{e}^{8/3}\,\mathrm{e}^{-2\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin^3 x\right)} ,$$

e, tramite la sostituzione, troviamo

$$y(x) = -\left[1 + 3\mathrm{e}^{8/3}\,\mathrm{e}^{-2\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin^3 x\right)}\right]^{-1/2} .$$

Possiamo notare che le due soluzioni trovate con i due metodi sono le stesse con un semplice calcolo:

$$\mathrm{e}^{-2\left(-\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\ln 3\right)} = 3\mathrm{e}^{8/3} .$$

La soluzione così trovata ha intervallo massimale di esistenza su $\mathbb{R}$. A questo risultato si può pervenire senza fare calcoli, ma adottando un approccio puramente teorico: l'equazione a variabili separabili ammette le tre soluzioni costanti $y \equiv 1$, $y \equiv 0$ e $y \equiv -1$; per il teorema di unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy ogni soluzione con dato iniziale $y(x_0) = y_0$ con $y_0 \in (-1, 0)$ sarà tale che $y(t) \in (-1, 0)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, similmente se $y_0 \in (0, 1)$ avremo $y(t) \in (0, 1)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Formalizzare per esercizio la precedente trattazione.

Esercizio 4.2. *Risolvere il seguente problema di Cauchy e determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione del seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'' - y' - 6y = 6\cos^2 x\,, \\ y(0) = -\dfrac{11}{52}\,, \qquad y'(0) = -\dfrac{3}{26}\,. \end{cases}$$

La soluzione generica dell'equazione omogenea $y'' - y' - 6y = 0$ è

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^{-2x} + c_2 \mathrm{e}^{3x}\,,$$

avendo il polinomio caratteristico $\lambda^2 - \lambda - 6$ le radici -2 e 3. Ricordando le formule di duplicazione del coseno troviamo che

$$2\cos^2 x = 1 + \cos(2x)\,,$$

rendendo così l'equazione assegnata affrontabile mediante il metodo della somiglianza (saremmo altrimenti costretti ad adottare il metodo di variazione delle costanti):

$$y'' - y' - 6y = 3 + 3\cos(2x)\,.$$

Considereremo quindi le due funzioni test $y_1(x) = K$ e $y_2(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x)$. Sostituendole entrambe nel membro destro dell'equazione troviamo:

$$\begin{aligned} y_0'' - y_0' - 6y_0 &= 0 + 0 - 6K = 3 \quad \Rightarrow \quad K = -\tfrac{1}{2}\,, \\ y_1'' - y_1' - 6y_1 &= -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x) - 2A\cos(2x) + 2B\sin(2x) \\ &\qquad - 6A\sin(2x) - 6B\cos(2x) = 3\cos(2x) \\ &\Rightarrow \begin{cases} -4A + 2B - 6A = 0 \\ -4B - 2A - 6B = 3 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} B = 5A \\ -52A = 3 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{3}{52}\,,\ B = -\frac{15}{52}\,. \end{aligned}$$

L'integrale generale dell'equazione è quindi

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^{-2x} + c_2 \mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{2} - \frac{3}{52}\sin(2x) - \frac{15}{52}\cos(2x)\,,$$

con derivata

$$y'(x) = -2c_1 \mathrm{e}^{-2x} + 3c_2 \mathrm{e}^{3x} - \frac{3}{26}\cos(2x) + \frac{15}{26}\sin(2x)\,.$$

Sostituendo i dati iniziali troviamo

$$\begin{cases} \frac{11}{52} = y(0) = c_1 + c_2 - \frac{1}{2} - \frac{15}{52} \\ -\frac{3}{26} = -2c_1 + 3c_2 - \frac{3}{26} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 = 3c_2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{3}{5}\,,\ c_2 = \frac{2}{5}$$

e quindi la soluzione (con intervallo massimale $\mathbb{R}$)

$$y(x) = \frac{3}{5}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{2}{5}\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{2} - \frac{3}{52}\sin(2x) - \frac{15}{52}\cos(2x)\,.$$

Esercizio 4.3. *Risolvere il seguente problema di Cauchy e determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione del seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = e^x + e^{-x}, \\ y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0. \end{cases}$$

La soluzione generica dell'equazione omogenea $y'' + 3y' + 2y = 0$ è

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^{-x} + c_2 \mathrm{e}^{-2x},$$

avendo il polinomio caratteristico $\lambda^2 + 3\lambda + 2$ le radici -1 e -2. Considereremo quindi le due funzioni test $y_1(x) = A\mathrm{e}^x$ e $y_2(x) = Bx\mathrm{e}^{-x}$. Sostituendole entrambe nel membro destro dell'equazione troviamo:

$$\begin{aligned} y_1'' + 3y_1' + 2y_1 &= 6A\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow A = \tfrac{1}{6} \\ y_2'' + 3y_2' + 2y_2 &= -2B\mathrm{e}^{-x} + Bx\mathrm{e}^{-x} + eB\mathrm{e}^{-x} - 3Bx\mathrm{e}^{-x} + 2Bx\mathrm{e}^{-x} \\ &= B\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x} \quad \Rightarrow B = 1 \end{aligned}$$

L'integrale generale dell'equazione è quindi

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^{-x} + c_2 \mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x},$$

con derivata

$$y'(x) = -c_1 \mathrm{e}^{-x} - 2c_2 \mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}.$$

Sostituendo i dati iniziali troviamo

$$\begin{cases} 0 = y(0) = c_1 + c_2 + \frac{1}{6} \\ 0 = y'(0) = -c_1 - 2c_2 + \frac{1}{6} + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = -\frac{1}{6} \\ c_1 + 2c_2 = \frac{7}{6} \end{cases} \Rightarrow c_1 = -\frac{3}{2},\ c_2 = \frac{4}{3}$$

e quindi la soluzione (con intervallo massimale $\mathbb{R}$)

$$y(x) = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x} + \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x},$$

Esercizio 4.4. *Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali*

$$y'' - 2y' + 5y = \sin x \cos x, \qquad y'' - 2y' + 5y = 10\sin(2x).$$

e risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = \sin x \cos x, \\ y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0. \end{cases}$$

La soluzione generica dell'equazione omogenea $y'' - 2y' + 5y = 0$ è

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^x \sin(2x) + c_2 \mathrm{e}^x \cos(2x),$$

avendo il polinomio caratteristico $\lambda^2 - 2\lambda + 5$ le radici $1 \pm 2i$. Cerchiamo una soluzione particolare per la seconda equazione differenziale mediante la funzione test $y_0(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x)$, trovando

$$\begin{aligned}
y_0'' - 2y_0' + 5y_0 &= -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x) - 4A\cos(2x) + 4B\sin(2x) \\
&\qquad + 5A\sin(2x) + 5B\cos(2x) = 10\sin(2x) \\
&\Rightarrow \begin{cases} -4A + 4B + 5A = 10 \\ -4B - 4A + 5B \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A + 4B = 10 \\ B = 4A \end{cases} \\
&\Rightarrow A = \frac{10}{17}\,,\ B = \frac{40}{17}\,.
\end{aligned}$$

L'integrale generale dell'equazione $y'' - 2y' + 5y = 10\sin(2x)$ è quindi

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^x \sin(2x) + c_2 \mathrm{e}^x \cos(2x) + \frac{10}{17}\sin(2x) + \frac{40}{17}\cos(2x)\,.$$

Per l'equazione $y'' - 2y' + 5y = \sin x \cos x$, essendo $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$, basta divide per 20 la soluzione particolare dell'altra equazione:

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^x \sin(2x) + c_2 \mathrm{e}^x \cos(2x) + \frac{1}{34}\sin(2x) + \frac{2}{17}\cos(2x)\,,$$

con derivata

$$\begin{aligned}
y'(x) = c_1\mathrm{e}^x \sin(2x) + 2c_1\mathrm{e}^x\cos(2x) + c_2\mathrm{e}^x\cos(2x) - 2c_2\mathrm{e}^x\sin(2x) \\
+ \frac{1}{17}\cos(2x) - \frac{4}{17}\sin(2x)\,.
\end{aligned}$$

Per risolvere il problema di Cauchy, sostituiamo alle precedenti i dati iniziali:

$$\begin{cases} y(0) = 0 = c_2 + \frac{2}{17} \\ y'(0) = 0 = 2c_1 + c_2 - \frac{1}{17} \end{cases} \quad \Rightarrow c_1 = \frac{1}{34}\,,\ c_2 = -\frac{2}{17}\,,$$

ottenendo la soluzione del problema di Cauchy (con intervallo massimale $\mathbb{R}$)

$$y(x) = \frac{1}{34}\mathrm{e}^x\sin(2x) + -\frac{2}{17}\mathrm{e}^x\cos(2x) + \frac{1}{34}\sin(2x) + \frac{2}{17}\cos(2x)\,,$$

Esercizio 4.5. *Risolvere il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y''' - y' = 2\sin x\,, \\ y(0) = 1\,, \\ y'(0) = 0\,, \\ y''(0) = 1\,. \end{cases}$$

La soluzione generica dell'equazione omogenea $y''' - y' = 0$ è

$$y(x) = c_1 + c_2\mathrm{e}^x + c_3\mathrm{e}^{-x}\,,$$

avendo il polinomio caratteristico $\lambda^3 - \lambda$ le radici $0, 1, -1$. Cerchiamo una soluzione particolare mediante la funzione test $y_0(x) = A\sin x + B\cos x$, trovando

$$\begin{aligned}
y_0''' - y_0' &= -A\cos x + B\sin x - A\cos x + B\sin x = 2\sin x \\
&\Rightarrow A = 0\,,\ B = 1\,.
\end{aligned}$$

L'integrale generale dell'equazione è quindi

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + \cos x\,,\ .$$

con derivate

$$\begin{aligned} y'(x) &= c_2 e^x - c_3 e^{-x} - \sin x\,,\\ y''(x) &= c_2 e^x + c_3 e^{-x} - \cos x\,. \end{aligned}$$

Per risolvere il problema di Cauchy, sostituiamo alle precedenti i dati iniziali:

$$\begin{cases} y(0) = 1 = c_1 + c_2 + c_3 + 1 \\ y'(0) = 0 = c_2 - c_3 \\ y''(0) = 1 = c_2 + c_3 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_2 = c_3 \\ c_2 + c_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

ottenendo la soluzione del problema di Cauchy (con intervallo massimale $\mathbb{R}$)

$$y(x) = -2 + e^x + e^{-x} + \cos x\,.$$

Esercizio 4.6. *Risolvere il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} (1+x^2)y' - (1+y^2)x = 0\,, \\ y(\sqrt{e^\pi - 1}) = 1\,. \end{cases}$$

L'equazione può essere vista come equazione a variabili separabili:

$$\frac{y'}{1+y^2} = \frac{x}{1+x^2}\,,$$

e calcolando le primitive membro a membro troviamo

$$\arctan y(x) = \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + c\,,$$

da cui, sostituendo i dati iniziali troviamo il valore della costante

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln(1 + e^\pi - 1) + c \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{\pi}{4}\,.$$

La soluzione, isolando la funzione y risulta

$$y(x) = \tan\left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{\pi}{4}\right).$$

Passiamo ora a studiare l'intervallo massimale di esistenza. Per poter eliminare al membro sinistro l'arcotangente nei passaggi precedenti, dobbiamo chiedere

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

dove la prima disequazione è sempre valida essendo il logaritmo sempre positivo. Studiando la seconda troviamo:

$$\ln(1+x^2) < \frac{3}{2}\pi \quad \Rightarrow \quad x^2 < e^{\frac{3}{2}\pi} - 1$$

e quindi l'intervallo massimale di esistenza della soluzione

$$\left(-\sqrt{e^{\frac{3}{2}\pi} - 1}\,, \sqrt{e^{\frac{3}{2}\pi} - 1}\right).$$

4.2 A.A. 2019/2020

Esercizio 4.7. *Risolvi il seguente problema di Cauchy al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} x'' + 4x = \sin(2t + \alpha)\,, \\ x(0) = 1\,, \\ x'(0) = 0\,. \end{cases}$$

L'equazione omogenea associata $x'' + 4x = 0$ ha soluzione generica $x(t) = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t)$, avendo il polinomio caratteristico le soluzioni $\lambda = \pm 2i$. Notiamo che il forzante $\sin(2t + \alpha)$ è soluzione dell'equazione omogenea, quindi cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$x_0(t) = At \sin(2t + \alpha) + Bt \cos(2t + \alpha)$$

con derivate

$$\begin{aligned} x_0'(t) &= A \sin(2t + \alpha) + 2At \cos(2t + \alpha) + B \cos(2t + \alpha) - 2Bt \sin(2t + \alpha)\,, \\ x_0''(t) &= 4A \cos(2t + \alpha) - 4At \sin(2t + \alpha) - 4B \sin(2t + \alpha) - 4Bt \cos(2t + \alpha)\,. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo

$$x_0''(t) + 4x_0(t) = 4A \cos(2t + \alpha) - 4B \sin(2t + \alpha) = \sin(2t + \alpha)\,,$$

da cui concludiamo che $A = 0$ e $B = -\frac{1}{4}$. L'integrale generale dell'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea assegnata è quindi

$$x(t) = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t) - \tfrac{1}{4} t \cos(2t + \alpha)\,.$$

con derivata

$$x'(t) = 2c_1 \cos(2t) - 2c_2 \sin(2t) - \tfrac{1}{4} \cos(2t + \alpha) + \tfrac{1}{2} t \sin(2t + \alpha)\,.$$

Sostituendo i dati iniziali troviamo

$$\begin{cases} 1 = x(0) = c_2 \\ 0 = x'(0) = 2c_1 - \frac{1}{4} \cos\alpha \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 = \frac{1}{8} \cos\alpha \end{cases}$$

e quindi la soluzione richiesta (definita sull'intervallo massimale $\mathbb{R}$):

$$x(t) = \tfrac{1}{8} \cos\alpha \sin(2t) + \cos(2t) - \tfrac{1}{4} t \cos(2t + \alpha)\,.$$

Alternativa: si poteva usare la formula della somma

$$\sin(2t + \alpha) = \sin(2t)\cos(\alpha) + \cos(2t)\sin(\alpha)$$

e cercare una soluzione particolare del tipo $a \sin(2t) + b \cos(2t)$.

Esercizio 4.8. *Risolvi il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} x' = |x| \cos t - x \sin t\,, \\ x(0) = 1\,. \end{cases}$$

Notiamo che il membro destro è una funzione Lipschitziana rispetto alla variabile x e che $x = 0$ è una soluzione dell'equazione differenziale data. Quindi la soluzione del problema di Cauchy sarà sempre positiva (spiegare come esercizio di teoria il perché). Possiamo allora ignorare il valore assoluto. Notiamo inoltre che vale

$$|x \cos t - x \sin t| \leq 2|x| + 0\,,$$

quindi abbiamo l'esistenza globale delle soluzioni dell'equazione differenziale, che quindi saranno definite su $\mathbb{R}$. Il problema di Cauchy da risolvere è quindi

$$\begin{cases} x' = x(\cos t - \sin t)\,, \\ x(0) = 1\,. \end{cases}$$

che si può risolvere facilmente essendo l'equazione differenziale a variabili separabili

$$\begin{aligned} &\frac{x'(t)}{x(t)} = \cos t - \sin t \\ &\Rightarrow \ln(x(t)) = \sin t + \cos t + c \\ &\quad \Rightarrow x(t) = \mathrm{e}^{\sin t + \cos t + c}\,. \end{aligned}$$

Sostituendo i dati iniziali troviamo $c = -1$, quindi la soluzione risulta:

$$x(t) = \mathrm{e}^{\sin t + \cos t - 1}\,.$$

Esercizio 4.9. *Risolvi il seguente problema di Cauchy, sia con il metodo dell'Ansatz (detto anche metodo della somiglianza) che con il metodo di variazione delle costanti:*

$$\begin{cases} x'' - 8x' + 12x = e^{3t}\,, \\ x(0) = \frac{2}{3}\,, \\ x'(0) = -3\,. \end{cases}$$

L'equazione lineare omogenea associata ha integrale generale

$$x(t) = c_1 \mathrm{e}^{2t} + c_2 \mathrm{e}^{6t}\,,$$

essendo 2 e 6 le soluzioni del polinomio caratteristico $\lambda^2 - 8\lambda + 12$ associato.

Tecnica dell'Ansatz: Proviamo a trovare una soluzione particolare dell'equazione lineare non omogenea con la funzione test $x_0(t) = A\mathrm{e}^{3t}$. Troviamo

$$\begin{aligned} x_0''(t) - 8x_0'(t) + 12x_0(t) &= 9e^{3t} - 8 \cdot 3e^{3t} + 12e^{3t} \\ &= -3Ae^{3t} = e^{3t}\,, \end{aligned}$$

da cui deduciamo $A = -\frac{1}{3}$ e quindi la soluzione generica dell'equazione lineare non omogenea

$$x(t) = c_1 \mathrm{e}^{2t} + c_2 \mathrm{e}^{6t} - \tfrac{1}{3} \mathrm{e}^{3t}\,.$$

Variazione delle costanti: Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} c_1'\, e^{2t} + c_2'\, e^{6t} = 0 \\ 2c_1'\, e^{2t} + 6c_2'\, e^{6t} = e^{3t} \end{cases}$$

che risolviamo usando il teorema di Cramer

$$D = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{6t} \\ 2e^{2t} & 6e^{6t} \end{vmatrix} = 4e^{8t}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & e^{3t} \\ 2e^{2t} & 6e^{6t} \end{vmatrix} = -\mathrm{e}^{9t}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{6t} \\ 0 & \mathrm{e}^{3t} \end{vmatrix} = e^{5t}$$

$$c_1'(t) = \frac{D_x}{D} = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^t \quad \Rightarrow \quad c_1(t) = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^t + d_1\,,$$

$$c_2'(t) = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-3t} \quad \Rightarrow \quad c_2(t) = -\frac{1}{12}\mathrm{e}^{-3t} + d_2\,.$$

Quindi abbiamo la soluzione

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(-\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^t + d_1\right)\mathrm{e}^{2t} + \left(-\tfrac{1}{12}\mathrm{e}^{-3t} + d_2\right)\mathrm{e}^{2t} \\ &= d_1\mathrm{e}^{2t} + d_2\mathrm{e}^{6t} - \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}\,. \end{aligned}$$

Una volta notato che l'integrale generale trovato con i due metodi è lo stesso, possiamo risolvere il problema di Cauchy. Dapprima calcoliamo la derivata della soluzione generica

$$x'(t) = 2c_1\mathrm{e}^{2t} + 6c_2\mathrm{e}^{6t} - \mathrm{e}^{3t}\,.$$

Quindi sostituendo i dati iniziali troviamo

$$\begin{cases} x(0) = c_1 + c_2 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ x'(0) = 2c_1 + 6c_2 - 1 = -3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 + 6c_2 = -2 \end{cases}$$

da cui troviamo la soluzione $c_1 = 2$, $c_2 = -1$. La soluzione cercata (con intervallo massimale di esistenza $\mathbb{R}$) è quindi

$$x(t) = 2\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{6t} - \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}\,.$$

Esercizio 4.10. *Risolvi il problema di Cauchy e determina l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:*

$$\begin{cases} x' - \dfrac{1}{3}x = -2\mathrm{e}^t x^4\,, \\ x(0) = 1\,. \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione di Bernoulli che si risolve dividendo per x^4 l'equazione differenziale e sostituendo quindi $y = x^{-3}$:

$$-3\frac{x'}{x^4} + \frac{1}{x^3} = 6e^t \quad \overset{y=x^{-3}}{\Longrightarrow} \quad y' + y = 6e^t\,.$$

La formula risolutiva ci dà

$$y(t) = e^{-t}\left[\int e^t \cdot 6e^t\,dt + c\right] = ce^{-t} + 3e^t\,.$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(0) = x(0)^{-3} = 1$ e troviamo $1 = y(0) = c + 3$ quindi $c = -2$ che dà la soluzione

$$y(t) = 3e^t - 2e^{-t}\,,$$

che porta a

$$x(t) = \left(3e^t - 2e^{-t}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

La soluzione ha intervallo massimale $I = (\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}, +\infty)$. A tale risultato si arriva individuando il dominio della soluzione e considerando l'intervallo aperto più grande contenuto nel dominio che contiene il punto $t = 0$.

Esercizio 4.11. *Risolvi il seguente problema di Cauchy e determina l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:*

$$\begin{cases} x' + tx = \frac{t^3}{x}\,, \\ x(0) = -2\,. \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione di Bernoulli che si risolve moltiplicando per x l'equazione differenziale e sostituendo quindi $y = x^2$:

$$x\,x' + tx^2 = t^3 \qquad \overset{y=x^2}{\Longrightarrow} \qquad y' = -2ty + 2t^3\,.$$

La formula risolutiva ci dà

$$y(t) = e^{-t^2}\left[\int e^{t^2}\cdot 2t^3\,dt + c\right] = e^{-t^2}\left[t^2e^{t^2} - e^{t^2} + c\right] = t^2 - 1 + ce^{-t^2}\,.$$

(svolgere i calcoli per esercizio). Imponiamo la condizione iniziale $y(0) = x(0)^2 = 4$ e troviamo $c = 5$ che dà la soluzione

$$y(t) = t^2 - 1 + 5e^{-t^2}\,,$$

che porta a

$$x(t) = -\sqrt{t^2 - 1 + 5e^{-t^2}}$$

La soluzione ha intervallo massimale $I = \mathbb{R}$. Infatti l'argomento della radice è sempre positivo: infatti, se $|x| \le 1$ allora $5e^{-t^2} + t^2 \ge 5e^{-t^2} \ge 5e^{-1} > 1$, mentre se $|x| > 1$ allora $t^2 + 5e^{-t^2} > t^2 > 1$.

Esercizio 4.12. *Risolvi il problema di Cauchy e determina l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x'' - x' + x = t\,, \\ x(0) = 4\,, \qquad x'(0) = 8\,. \end{cases}$$

Innanzitutto è conveniente riscrivere l'equazione differenziale come $x'' - 2x' + 2x = 2t$. Troviamo il polinomio caratteristico associato $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ che ha soluzioni $1 \pm i$. Quindi le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono

$$c_1 \mathrm{e}^t \sin t + c_2 \mathrm{e}^t \cos t\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Cerchiamo la soluzione particolare come un polinomio di primo grado del tipo $x(t) = At + B$ con derivate $x'(t) = A$ e $x''(t) = 0$. Sostituendo queste funzioni nell'equazione differenziale troviamo

$$x'' - 2x' + 2x = -2A + 2At + B = 2t$$

da cui deduciamo che $A = B = 1$. L'integrale generale risulta quindi

$$x(t) = 1 + t + c_1 e^t \sin t + c_2 e^t \cos t\,,$$

con derivata

$$x'(t) = 1 + c_1 e^t(\sin t + \cos t) + c_2 e^t(\cos t - \sin t)\,.$$

Sostituendo i dati iniziali troviamo le identità

$$4 = x(0) = c_2 + 1\,, \quad 8 = x'(0) = c_1 + c_2 + 1\,,$$

che portano alla soluzione $c_1 = 4$, $c_2 = 3$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$x(t) = 1 + t + 3e^t \sin t + 4e^t \cos t\,.$$

Infine, l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è ovviamente $\mathbb{R}$.

Esercizio 4.13. *Risolvi il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = \sqrt{\dfrac{1+x}{1+t}}\,, \\ x(0) = 3 \end{cases}$$

e determina l'intervallo massimale di esistenza della soluzione. Disegna l'insieme su cui è ben definita l'equazione differenziale.

L'equazione differenziale è ben definita per

$$\frac{1+x}{1+t} \geq 0$$

ovvero nell'insieme

$$D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (t > -1 \wedge x \geq -1) \vee (t < -1 \wedge x \leq -1)\}\,.$$

L'equazione differenziale è a variabili separabili e, notato che $t_0 = 0 > -1$ e $x(t_0) = 3 \geq -1$ si risolve nel modo seguente

$$\begin{aligned} \frac{x'}{\sqrt{1+x}} &= \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,, \\ \tfrac{1}{2}\sqrt{1+x} &= \tfrac{1}{2}\sqrt{1+t} + d\,, \\ \sqrt{1+x} &= \sqrt{1+t} + c\,, \qquad (c = 2d)\,. \end{aligned}$$

Sostituendo i dati iniziali troviamo l'identità $2 = 1 + c$ che ci porta a $c = 1$. Isoliamo ora la variabile x ottenendo la soluzione

$$x(t) = \left(\sqrt{1+t} + 1\right)^2 - 1$$

definita sull'intervallo massimale $I = (-1, +\infty)$ (deve essere aperto! Infatti in -1 la funzione non risulta derivabile).

Esercizio 4.14. *Risolvi i seguenti problemi di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = t^{-1} + \mathrm{e}^{-x} \\ x(1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -t^{-1} + \mathrm{e}^{-x} \\ x(1) = -2\ln 2 \end{cases}$$

specificando l'intervallo massimale di esistenza.

Suggerimento: Introdurre la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{x(t)}$, quindi esprimere y' in funzione di y e t, usando l'equazione differenziale data. Si otterrà un'equazione differenziale lineare nella variabile y.

Notiamo innanzitutto che, nei due casi,

$$y'(t) = \mathrm{e}^{x(t)}x'(t) = \mathrm{e}^{x(t)}\left(t^{-1} + \mathrm{e}^{-x(t)}\right) = \frac{y(t)}{t} + 1\,,$$

$$y'(t) = \mathrm{e}^{x(t)}x'(t) = \mathrm{e}^{x(t)}\left(-t^{-1} + \mathrm{e}^{-x(t)}\right) = -\frac{y(t)}{t} + 1\,,$$

mentre i dati iniziali diventano $y(1) = 1$ e $y(1) = \frac{1}{4}$. Quindi dobbiamo risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{t} + 1 \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = -\frac{y}{t} + 1 \\ y(1) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Notiamo che il problema non è definito per $t = 0$, quindi la soluzione sarà definita in un sottinsieme di $\mathbb{R}^+$. Ci concentreremo solo su "tempi positivi" nei prossimi passaggi.

Data un'equazione lineare del tipo $y' = a(t)y + b(t)$ la soluzione è data da

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)}[B(t) + c]\,, \quad A(t) = \int a(t)\,dt\,, \quad B(t) = \int \mathrm{e}^{-A(t)}b(t)\,dt\,.$$

Primo problema di Cauchy. In questo caso troviamo $A(t) = \ln t$ da cui $\mathrm{e}^{A(t)} = t$, $\mathrm{e}^{-A(t)}b(t) = \frac{1}{t}$ e infine $B(t) = \ln t$. Quindi la soluzione è del tipo

$$y(t) = t(\ln t + c)$$

Sostituendo i dati inziali abbiamo $1 = y(1) = 1(0 + c)$ quindi $c = 1$. Ritornando alla variabile x abbiamo la soluzione

$$x(t) = \ln\big(t(\ln t + 1)\big)$$

che è ben definita quando l'argomento del logaritmo è positivo. Ricordando che abbiamo già notato che dobbiamo prendere $t > 0$ concludiamo che dobbiamo chiedere anche $\ln t + 1 > 0$ ovvero $t > \mathrm{e}^{-1}$. Quindi l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è $I = (\mathrm{e}^{-1}, +\infty)$.

Secondo problema di Cauchy. In questo caso troviamo $A(t) = -\ln t$ da cui $\mathrm{e}^{A(t)} = \frac{1}{t}$, $\mathrm{e}^{-A(t)}b(t) = t$ e infine $B(t) = t^2/2$. Quindi la soluzione è del tipo

$$y(t) = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}t^2 + c\right)$$

Sostituendo i dati inziali abbiamo $\frac{1}{4} = y(1) = 1(\frac{1}{2} + c)$ quindi $c = -\frac{1}{4}$. Ritornando alla variabile x abbiamo la soluzione

$$x(t) = \ln\left(\frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\frac{1}{t}\right)$$

che è ben definita quando l'argomento del logaritmo è positivo. Ricordando che abbiamo già notato che dobbiamo prendere $t > 0$ concludiamo che dobbiamo chiedere anche $t^2 - \frac{1}{2} > 0$, che si traduce in $t > 2^{-1/2}$. Quindi l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è $I = (2^{-1/2}, +\infty)$.

Esercizio 4.15. *Risolvi il seguente problema di Cauchy, al variare di* $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$*,*

$$\begin{cases} x'' + 3x' + 2x = \mathrm{e}^{-t} \\ x(0) = x_0\,, \quad x'(0) = v_0 \end{cases}$$

Determinare i valori (x_0, v_0) *per cui si ha* $x(\pi) = 0$ *e* $x'(\pi) = 0$.

Scriviamo il polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea $x'' + 3x' + 2x = 0$: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2)$, troviamo le soluzioni $\lambda = -1, -2$, quindi l'equazione omogenea ha soluzioni del tipo $x(t) = A\mathrm{e}^{-t} + B\mathrm{e}^{-2t}$. Il forzante è esso stesso una soluzione dell'omogenea, quindi dobbiamo usare la funzione $x(t) = Ct\mathrm{e}^{-t}$ per il metodo della somiglianza. Otteniamo, sostituendola nell'equazione differenziale

$$(-2C\mathrm{e}^{-t} + Ct\mathrm{e}^{-t}) + 3(C\mathrm{e}^{-t} - Ct\mathrm{e}^{-t}) + 2Ct\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t}$$

da cui abbiamo troviamo $C = 1$. La soluzione generica di $x'' + 3x' + 2x = \mathrm{e}^{-t}$ è quindi

$$x(t) = A\mathrm{e}^{-t} + B\mathrm{e}^{-2t} + t\mathrm{e}^{-t}$$

con derivata

$$x'(t) = -A\mathrm{e}^{-t} - 2B\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-t} - t\mathrm{e}^{-t}\,.$$

Sostituendo i dati iniziali abbiamo il sistema

$$x_0 = A + B\,, v_0 = -A - 2B + 1$$

da cui otteniamo

$$A = 2x_0 + v_0 - 1\,, \quad B = 1 - x_0 - v_0\,.$$

Quindi la soluzione sarà

$$x(t) = (2x_0 + v_0 - 1)\mathrm{e}^{-t} + (1 - x_0 - v_0)\mathrm{e}^{-2t} + t\mathrm{e}^{-t} \tag{6}$$

$$x'(t) = -(2x_0 + v_0 - 1)\mathrm{e}^{-t} - 2(1 - x_0 - v_0)\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-t} - t\mathrm{e}^{-t}\,. \tag{7}$$

Valutando in $t = \pi$ queste funzioni troviamo, mantenendo le notazioni con A, B, dopo aver moltiplicato tutto per e^{π},

$$0 = A + B\mathrm{e}^{-\pi} + \pi\,, \qquad 0 = -A - 2B\mathrm{e}^{-\pi} + 1 - \pi$$

da cui troviamo $B = \mathrm{e}^{\pi}$ e $A = -\pi - 1$. Quindi

$$x(t) = -(\pi+1)\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{\pi}\mathrm{e}^{-2t} + t\mathrm{e}^{-t}$$

$$x'(t) = (\pi+1)\mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{\pi}\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-t} - t\mathrm{e}^{-t}\,.$$

Valutando in zero, troviamo $x_0 = \mathrm{e}^{\pi} - \pi - 1$ e $v_0 = \pi + 2 - 2\mathrm{e}^{\pi}$. Valutare le formule (6) and (7) in $t = \pi$ per poi risolvere il sistema può essere un'alternativa possibile.

4.3 A.A. 2020/2021

Esercizio 4.16. *Risolvi il seguente problema di Cauchy, al variare di* $x_0 \in \mathbb{R}^+, y_0 \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{cases} x'' + (x')^3 = 0 \\ x(0) = x_0\,, \quad x'(0) = -v_0 \end{cases}$$

Qual è l'intervallo massimale di esistenza della soluzione?
Determinare, se esistono, gli istanti $\tau > 0$ *in cui si ha* $x(\tau) = 0$.

Poniamo $y = x'$ e troviamo che l'equazione differenziale risulta $y' = -y^3$. Poiché il dato iniziale $x'(0) = y(0) = -v_0 \neq 0$ possiamo risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -y^3 \\ y(0) = -v_0 \end{cases}$$

usando il metodo di separazione delle variabili e ottenere

$$-\frac{y'(t)}{[y(t)]^3} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{[y(t)]^2} = 2t + c$$

da cui si ottiene, sostituendo il dato iniziale

$$c = \frac{1}{v_0^2}\,.$$

Ricordando che la funzione cercata sarà negativa (essendo negativa all'istante iniziale) troviamo

$$x'(t) = y(t) = -(2t + \tfrac{1}{v_0^2})^{-1/2}\,, \quad \forall t \in I = (-\tfrac{1}{2v_0^2}, +\infty)$$

dove I è l'intervallo massimale di esistenza. Calcoliamo quindi

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(s)\,ds = x_0 - \int_0^t (2s + \tfrac{1}{v_0^2})^{-1/2}\,ds = x_0 - \sqrt{2t + \tfrac{1}{v_0^2}} + \tfrac{1}{v_0}$$

anch'essa definita sull'intervallo massimale $I = (-\frac{1}{2v_0^2}, +\infty)$. Cerchiamo ora gli istanti τ richiesti ponendo

$$0 = x(\tau) = x_0 - \sqrt{2\tau + \tfrac{1}{v_0^2}} + \tfrac{1}{v_0}$$

che porta a

$$2\tau + \tfrac{1}{v_0^2} = \left(x_0 + \tfrac{1}{v_0}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \tau = \tfrac{x_0^2}{2} + \tfrac{x_0}{v_0}\,.$$

Esercizio 4.17. *Risolvi i seguenti problemi di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = \cos^2 x\ \sin^2 t\,, \\ x(\pi) = \pi\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = [\sin(t+x) + \sin(t-x)]^2\,, \\ x(\pi) = \pi\,. \end{cases}$$

Quali sono gli intervalli massimali di esistenza delle soluzioni?

Osserviamo innanzitutto che il primo problema può essere riscritto come

$$\sin(t+x)+\sin(t-x)=2\sin t\cos x$$

cosicché il secondo problema diventerà

$$\begin{cases} x' = 4\cos^2 x \ \sin^2 t\,, \\ x(\pi)=\pi\,. \end{cases}$$

Dalla teoria sappiamo già che l'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni sarà $\mathbb{R}$ (perché?). Consideriamo l'equazione differenziale

$$x' = \alpha\cos^2 x \ \sin^2 t$$

dove nel nostro caso avremo $\alpha = 1$ oppure $\alpha = 4$ nei due casi. Poiché $\cos\pi = -1 \neq 0$, possiamo scrivere

$$\frac{x'(t)}{\cos^2(x(t))} = \alpha\sin^2 t$$

da cui, calcolando le primitive, otteniamo

$$\tan(x(t)) = \alpha\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin(2t) + c\right)$$

e sostituendo i dati iniziali

$$0 = \tan\pi = \alpha\left(\frac{\pi}{2} + 0 + c\right)\,,$$

quindi $c = -\frac{\pi}{2}$ e otteniamo la soluzione

$$x(t) = \arctan\left(\alpha\left(\tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4}\sin(2t) - \tfrac{\pi}{2}\right)\right) + \pi$$

facendo attenzione che dobbiamo invertire la tangente nell'intervallo $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$:

$$y = \tan x \quad \Rightarrow \quad x = \arctan y + \pi\,.$$

Si noti che se dimenticassimo di aggiungere π troveremmo $x(\pi) = 0$ e non $x(\pi) = \pi$ come richiesto.

Esercizio 4.18. *Data l'equazione differenziale $x' = (x^2-4)\cos(4t)$, calcolare le soluzioni dei problemi di Cauchy (e specificare per ognuna il suo intervallo massimale di esistenza) aventi dati iniziali*

$$x(\pi) = 1\,, \qquad x\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2\,, \qquad x\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -4\,.$$

Cominciamo a notare innanzitutto che il secondo problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = (x^2-4)\cos(4t)\,, \\ x\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2 \end{cases}$$

ha per soluzione la funzione costante $x(t) = -2$ con intervallo massimale di esistenza $\mathbb{R}$. Negli altri possiamo usare il metodo di separazione delle variabili e scrivere

$$\frac{x'(t)}{[x(t)]^2-4} = \cos(4t)\,. \tag{8}$$

Calcoliamo la primitiva

$$\int \frac{1}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\,dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C\,.$$

Dalla (8) segue che

$$\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| = \sin(4t) + c \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{x-2}{x+2}\right| = A\mathrm{e}^{\sin(4t)} \qquad (A = \mathrm{e}^c)$$

Sostituendo il dato iniziale $x(\pi) = 1$ troviamo

$$\frac{x-2}{x+2} = -\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\sin(4t)}$$

Invece, sostituendo il dato iniziale $x(-\pi/4) = -4$ troviamo

$$\frac{x-2}{x+2} = 3\mathrm{e}^{\sin(4t)}$$

Calcoliamo la seguente inversa

$$f(x) = \frac{x-2}{x+2} \quad\Rightarrow\quad f^{-1}(x) = 2\,\frac{1+y}{1-y}$$

così da ottenere le due soluzioni nell'ordine

$$x(t) = 2\,\frac{1-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\sin(4t)}}{1+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\sin(4t)}}\,, \quad \text{condizione iniziale: } x(\pi) = 1$$

$$x(t) = 2\,\frac{1+3\mathrm{e}^{\sin(4t)}}{1-3\mathrm{e}^{\sin(4t)}}\,, \quad \text{condizione iniziale: } x(-\pi/4) = -4\,.$$

La prima ha intervallo massimale di esistenza $\mathbb{R}$. La seconda è definita nel più grande intervallo aperto contenente l'istante iniziale $-\frac{\pi}{4}$ e che non contiene soluzioni di $1-3\mathrm{e}^{\sin(4t)} = 0$. Notiamo però che

$$1-3\mathrm{e}^{\sin(4t)} < 1-3\mathrm{e}^{-1} < 0$$

per ogni $t\in\mathbb{R}$. Quindi, anche in questo caso, l'intervallo massimale di esistenza è $\mathbb{R}$.

Esercizio 4.19. *Risolvi il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x''' + x' - 1 = 0\,, \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 1\,. \end{cases}$$

L'equazione differenziale si può riscrivere come $x''' + x' = 1$. Possiamo già aferamre che l'intervallo massimale di esistenza sarà $\mathbb{R}$. L'omogenea associata ha polinomio caratteristico $\lambda^3+\lambda = \lambda(\lambda^2+1)$ con soluzioni $0, \pm i$. L'equazione differenziale $x''' + x' = 0$ ha quindi soluzioni del tipo

$$A\sin t + B\cos t + C$$

con $A, B, C \in \mathbb{R}$. Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione differenziale $x''' + x' = 1$ provando con la funzione test $\bar{x}(t) = \alpha t$. Sostituendo $\bar{x}$ nell'equazione troviamo che deve essere $\alpha = 1$. Le soluzioni di $x''' + x' = 1$ sono tutte del tipo

$$x(t) = A \sin t + B \cos t + C + t$$

e ne calcoliamo le derivate

$$x'(t) = A \cos t - B \sin t + 1 \,,$$

$$x''(t) = -A \sin t - B \cos t \,.$$

Sostituiamo i dati iniziali e troviamo il sistema

$$\begin{cases} x(0) = 1 = B + C \\ x'(0) = 1 = A + 1 \\ x''(0) = 1 = -B \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C = 2 \\ A = 0 \\ B = -1 \end{cases}$$

che dà la soluzione

$$x(t) = 2 - \cos t + t \,.$$

Esercizio 4.20. *Spazio per l'esercizio di gennaio*

Esercizio 4.21. *Spazio per l'esercizio di febbraio*